

# Contents

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Verliesvrij filteren gebaseerd op vermogensoverdracht</b>	<b>6</b>
2.1	Reflektie en aanpassing bij een eenpoort netwerk . . . . .	6
2.2	Principe van verliesvrije filtering . . . . .	10
2.3	Golfvariabelen . . . . .	11
2.4	Berekening van de S-matrix . . . . .	18
2.4.1	Voorbeeld: . . . . .	20
2.5	De Tellegen polynomen van verliesvrije tweepoorten . . . . .	21
2.5.1	Enkele rekenvoorbeelden met de Tellegen polynomen . . . . .	22
2.5.2	Eigenschappen van de ladderfilters . . . . .	26
2.6	Uitgewerkte vraagstukken . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Synthese</b>	<b>45</b>
3.1	Inleiding . . . . .	45
3.2	Synthese van verliesvrije eenpoort immitanties . . . . .	47
3.2.1	Synthese volgens Foster . . . . .	47
3.2.2	Synthese volgens Cauer . . . . .	47
3.2.3	Mengvormen . . . . .	48
3.3	Passieve eenpoort-immitanties . . . . .	48
3.4	Eenvoudige tijdscontinue laddersynthese. . . . .	51
<b>4</b>	<b>Twee extra verliesvrije filterrealisatievormen</b>	<b>55</b>
4.1	Het microgolf ladderfilter met eenheidselementen . . . . .	55
4.1.1	Enkele w vlak (Kuroda) identiteiten . . . . .	57
4.1.2	Enkele voorbeelden . . . . .	60
4.2	De Jauman structuur . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Een uitgewerkt rekenvoorbeeld</b>	<b>66</b>
<b>6</b>	<b>Introductie in de microgolftechniek</b>	<b>70</b>

# Chapter 1

## Inleiding

De geschiedenis van de filtertechniek is analoog begonnen: analoge signalen, bewerkt met behulp van analoge netwerken.

Deze geschiedenis heeft filtereigenschappen van analoge filters tevoorschijn gebracht, die we met veel nut kunnen gebruiken in het tijdsdiskrete geval (verliesvrijheid, digitale golfilters).

De ontwikkeling van de analoge filtertheorie heeft zich (als onderdeel van de netwerktheorie) in het begin geconcentreerd op de situatie geschetst in figuur 1.1.

Figuur 1.1 schetst een niet-ideale spanningsbron (een spanningsbron met inwendige weerstand als model voor de signaalbron, denk b.v. aan een kabel) via een netwerk aangesloten op een belasting, met als model een weerstand (denk b.v. aan de karakteristieke weerstand van een kabel).

Het filternetwerk wat we zullen gebruiken is een 'geaarde tweepoort'. Dit als een onderdeel van de netwerktheorie waar ook meer algemene 'n-poort netwerken' worden bestudeerd.

De filterwerking houdt in dat we de energieverdeling aanwezig in het frequentie-

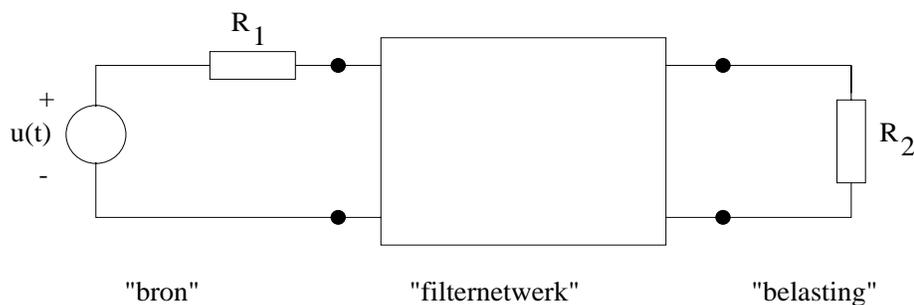


Figure 1.1: blokschema voor de filterwerking

spektrum van de signaalbron willen bewerken d.m.v. een lineair netwerk zodanig dat de energieverdeling die in de belasting terecht komt, een andere is. Bijvoorbeeld willen we bepaalde frekwenties aanwezig in de signaalbron, helemaal 'onderdrukken' (weghalen).

We richten ons op de reeds bekende soorten filterkarakteristieken: laagdoorlaat, hoogdoorlaat, banddoorlaat, etc, zie hiervoor figuur 1.2.

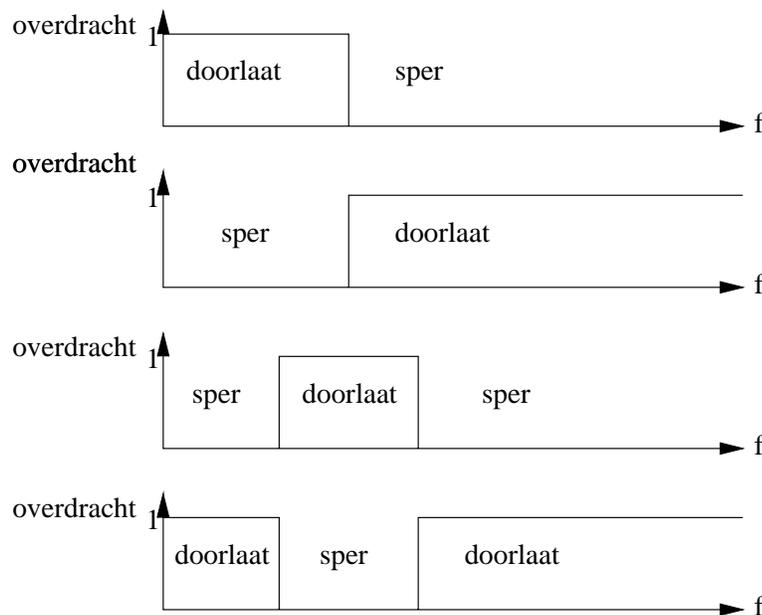


Figure 1.2: verschillende typen filters

De meest voor de hand liggende componenten om te gebruiken in het filter-netwerk zijn:

- weerstand
- zelfinductie
- capaciteit

Dat betekent dus: Passieve netwerken.

Het gebruik van de weerstand heeft als nadeel dat daarin vermogen verloren gaat. Vandaar de grote aandacht voor:

Passieve, verliesvrije netwerken,

als filternetwerk.

In DEEL 1 van dit diktaat zijn we begonnen met de studie van filters.

In hoofdstuk 2 van dit DEEL 1 bestudeerden we de klassieke benaderingstheorie van filter karakteristieken: de bekende Butterworth-, Chebyshev- en Chebyshev rationale funktie- ( ook wel Cauer- of Elliptische funktie- ) benaderingen kwamen ter sprake.

In hoofdstuk 3 van DEEL 1 kwamen allerlei typen actieve realisaties van filter overdrachtfuncties aan de orde. Deze realisaties gebruiken de weerstand, de capaciteit en de operationele versterker als componenten. Ook introduceerden we hier de realisaties met schakelende capaciteiten (switch-capacitor filters).

In hoofdstuk 4 van DEEL 1 introduceerden we de verliesvrije laddernetwerken (afgesloten in weerstanden) als filter realisatievorm.

In hoofdstuk 5 van DEEL 1 bespraken we allerlei realisatie vormen die in wezen simulaties zijn van de in hoofdstuk 4 behandelde laddernetwerken. We noen hier: realisaties met impedantie convertor (R-C-Aktief), de "Leap-frog realisatie, de Gyrtator-C netwerken.

In hoofdstuk 6 van DEEL 1 gaven we een aantal tabellen en grafieken waarmee het filter ontwerp in de praktijk wordt vereenvoudigd.

In dit DEEL 2 komen we terug op de tijdscontinue filters, in het bijzonder die filters waarvan de werking gebaseerd is op vermogensoverdracht. We introduceren een netwerkbeschrijving die geschikt is voor die beschrijving van vermogensoverdracht. Vervolgens bestuderen we de synthese methode die de laddernetwerken oplevert. Ook introduceren we een alternatieve realisatie vooroneven orde (symmetrische) filternetwerken: de Jauman structuur. Via een frekwentie transformatie zien we tenslotte hoe we de verliesvrije ladderstructuren, gebasserd op vermogensoverdracht, kunnen gebruiken in het domein van de microgolffiltertechniek.

In hoofdstuk 2 introduceren we de S-matrix waarmee we de vermogensoverdracht van verliesvrije filternetwerken (aan beide einden afgesloten in weerstanden) kunnen beschrijven. Begrippen als overdracht, reflectie en aanpassing komen te voorschijn. Dit zijn natuurlijke begrippen in het microgolffilterdomein waar spanning en stroom moeilijk worden in het gebruik vanwege het niet alleen tijdsafhankelijke maar ook nog plaatsafhankelijke karakter van deze grootheden. Ook introduceren we de Tellegen polynomen voor verliesvrije tweepoorten, de polynomen A, B, C, D, H en K.

In hoofdstuk 3 bestuderen we de eenvoudige tijdscontinue laddersynthese.

In hoofdstuk 4 bestuderen we de mogelijkheden om met de nu geleerde ontwerpkennis microgolfladdernetwerken te ontwerpen en eveneens bekijken we de mogelijkheden van de Jauman structuur. Deze zal later in DEEL 3, als we de tijdsdiskrete filtertechnieken bestuderen, terugkomen.

In hoofdstuk 5 werken we aan rekenvoorbeelden.

In hoofdstuk 6 worden tenslotte de overhead sheets gegeven waarmee in algemene introductie in de microgolffiltertechniek wordt geïntroduceerd.

## Chapter 2

# Verliesvrij filteren gebaseerd op vermogensoverdracht

### 2.1 Reflektie en aanpassing bij een eenpoort netwerk

We bekijken figuur 2.1.

Figuur 2.1 toont een (niet-ideale) bron, belast met een impedantie  $Z_2$ . We noemen  $P$  het reele afgeleverde vermogen (door de niet-ideale bron aan de belasting  $Z_2$ ).

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[U_1 \cdot I^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\frac{U_0 Z_2}{R_1 + Z_2} \cdot \left(\frac{U_0}{R_1 + Z_2}\right)^*\right], \quad (Z_2 = R_2 + jX_2) \quad (2.1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2}{|R_1 + Z_2|^2} \cdot |U_0|^2 \quad (2.2)$$

Dit vermogen is, zoals bekend, maximaal als  $X_2 = 0$  en  $R_2 = R_1$ :

$$P_{max} = \frac{1}{8} \cdot \frac{|U_0|^2}{R_1} \quad (2.3)$$

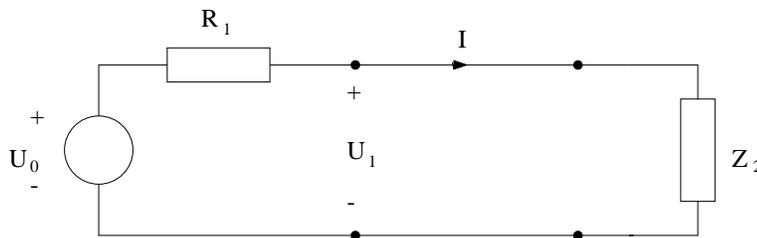


Figure 2.1: bron met belasting  $Z_2$

De verhouding tussen het in  $Z_2$  opgenomen vermogen en het maximaal beschikbare wordt:

$$\frac{P}{P_{max}} = \frac{4R_1 R_2}{|R_1 + Z_2|^2} \quad (2.4)$$

Voor het geval  $R_1 = R_2$  en  $X_2 = 0$  (aanpassing), wordt:

$$\frac{P}{P_{max}} = 1 \quad (2.5)$$

We kunnen ons afvragen wat er gebeurt met dat deel van het beschikbare vermogen dat niet in de belasting wordt opgenomen.

We stellen ons voor dat de bron wel het maximaal beschikbare vermogen afgeeft maar dat de belasting slechts een deel opneemt. Het verschil wordt als het ware gereflecteerd.

$$P_{refl} = P_{max} - P \quad (2.6)$$

$$\frac{P_{refl}}{P_{max}} = 1 - \frac{4R_1 R_2}{|R_1 + Z_2|^2} = \left| \frac{R_1 - Z_2}{R_1 + Z_2} \right|^2 \quad (2.7)$$

Vanaf nu zullen we aannemen dat  $Z_2$  reeël is, d.w.z.  $X_2 = 0 \rightarrow Z_2 = R_2$ . Dan wordt:

$$\frac{P}{P_{max}} = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \quad \text{en} \quad \frac{P_{refl}}{P_{max}} = \frac{(R_1 - R_2)^2}{(R_1 + R_2)^2} \quad (2.8)$$

We zien hier dat:  $\frac{P_{refl}}{P_{max}} = 0$  als  $R_1 = R_2$

We zeggen: de bron is volledig aangepast aan de belasting als geldt:  $R_1 = R_2$  (reflektie is nul).

Omgekeerd, bij een gegeven  $R_1$  is er volledige reflectie als geldt:  $R_2 = 0$  of  $R_2 \rightarrow \infty$ .

Deze situatie doet zich b.v. voor als we voor  $Z_2$  verliesvrije impedanties kiezen.

### VRAAG:

Zoek uit voor welke frekwenties:  $\omega = 0, \omega \rightarrow \infty, \omega = \omega_1$  er volledige aanpassing of -reflektie is in het netwerk bovenin figuur 2.2 als de impedantie  $Z$  daarin achtereenvolgens de aangegeven impedanties voorstelt.

### ANTWOORD:

Netwerk 1: De belastingsimpedantie is een serieschakeling van  $L$  en  $R_1$ :

Deze impedantie kan alleen volledig aangepast zijn aan de bronweerstand van  $R_1$  als de impedantie van L gelijk is aan 0. Dit is bij  $\omega = 0$ . Bij  $\omega \rightarrow \infty$  is er volledige reflectie want de impedantie is oneindig groot.

Netwerk 2: De belastingsimpedantie is een serieschakeling van C en  $R_1$ :  
Deze impedantie kan alleen volledig aangepast zijn aan de bronweerstand van  $R_1$  als de impedantie van C gelijk is aan 0. Dit is het geval bij  $\omega \rightarrow \infty$ . Bij  $\omega = 0$  is er volledige reflectie want de impedantie is oneindig groot.

Netwerk 3: De belastingsimpedantie is een parallelschakeling van L en  $R_1$ :  
Voor  $\omega = 0$  is er volledige reflectie want de impedantiewaarde is 0. Voor  $\omega \rightarrow \infty$  is er volledige aanpassing want de waarde van de impedantie is gelijk aan  $R_1$ .

Netwerk 4: De belastingsimpedantie is een parallelschakeling van C en  $R_1$ :  
Voor  $\omega \rightarrow \infty$  is er volledige reflectie want de waarde van de impedantie is 0.  
Voor  $\omega = 0$  is er volledige aanpassing want de waarde van de impedantie is gelijk aan  $R_1$ .

Netwerk 5: De belastingsimpedantie is een serieschakeling van L, C en  $R_1$ :  
Voor de waarden  $\omega = 0$  en  $\omega \rightarrow \infty$  is er volledige reflectie want de waarde van de impedantie is daar oneindig groot. Bij de resonantie frequentie van de seriekring is er volledige aanpassing, daar is de impedantie van de LC seriekring immers 0.

Netwerk 6: De belastingsimpedantie is een parallelschakeling van L, C en  $R_1$ :  
Voor de waarden  $\omega = 0$  en  $\omega \rightarrow \infty$  is er volledige aanpassing want daar is de impedantie van de LC parallelkring oneindig groot en blijft dus de weerstand alleen over. Bij de resonantie frequentie van de seriekring is er volledige reflectie want daar wordt de impedantie waarde van de LC seriekring gelijk aan 0.

Netwerk 7:  
Voor de frequentie 0 blijft de weerstand alleen over, er is dus volledige aanpassing. Voor  $\omega \rightarrow \infty$  is er volledige reflectie want de impedantie waarde wordt gelijk 0. Er is ook volledige reflectie bij de resonantie frequentie van de LC parallelkring de impedantie van kring wordt daar oneindig groot.

Netwerk 8:  
Hiervoor geldt hetzelfde als dat wat gezegd is over netwerk 7.

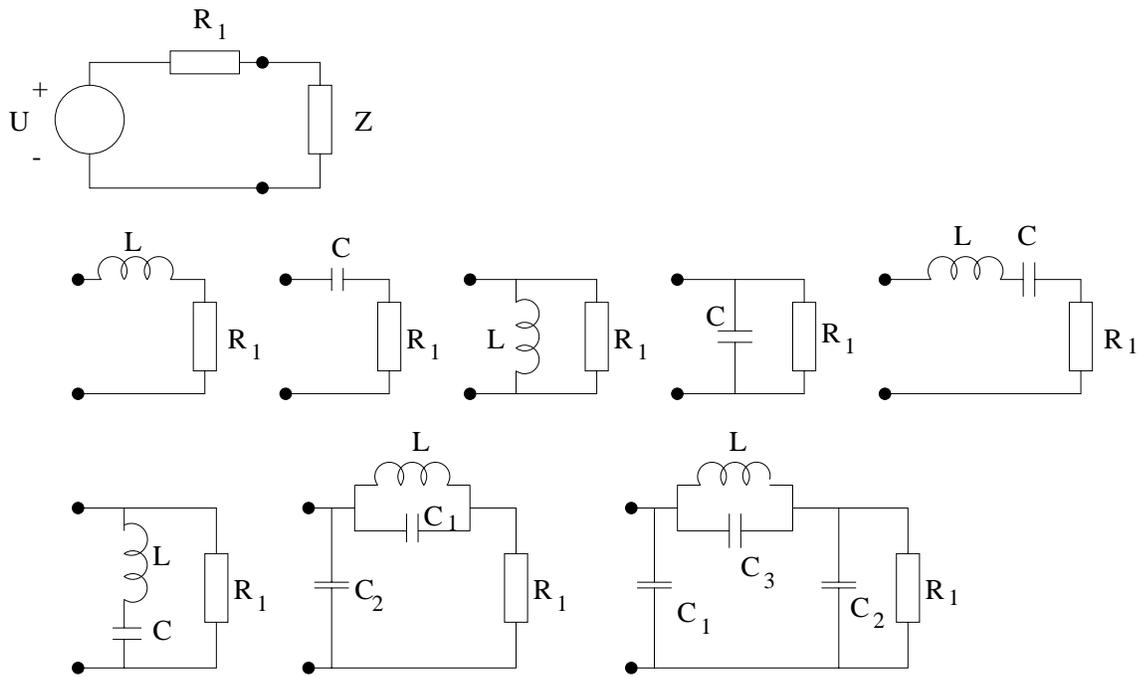


Figure 2.2: niet-ideale bron met verschillende belastingen  $Z$

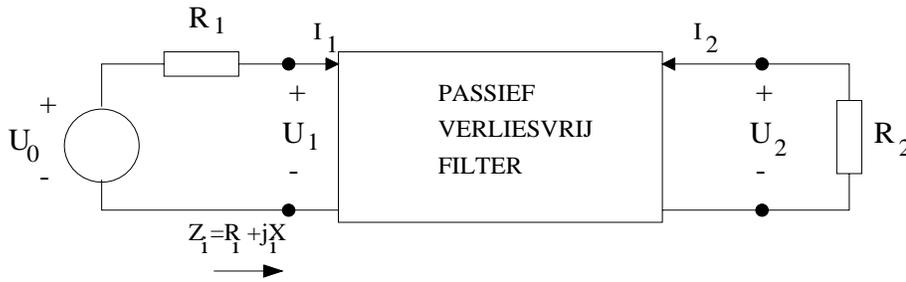


Figure 2.3: Principe van verliesvrije filtering

**Opmerking:**

Wij veronderstellen de inwendige impedantie van de bron gelijk aan een weerstand. Een meer algemene situatie doet zich voor als we stellen dat de inwendige impedantie van de bron gelijk is aan  $Z_1 = R_1 + jX_1$ . Als we nu stellen dat de belasting gelijk is aan  $Z_2 = R_2 + jX_2$  dan geldt voor aanpassing in dit meer algemene geval dat moet gelden:

$$R_1 = R_2 \text{ en } X_1 + X_2 = 0.$$

We zullen deze situatie verder laten rusten.

## 2.2 Principe van verliesvrije filtering

We bekijken de situatie van figuur 2.3:

Het werkelijk opgenomen vermogen aan poort 1 van figuur 2.3 is:

$$P_i = \frac{1}{2} \frac{R_i}{(R_1 + R_i)^2 + X_i^2} \cdot |U_0|^2 \tag{2.9}$$

Dit volgt uit formule 2.2. Bovenstaand werkelijk opgenomen vermogen aan poort 1 wordt ook afgegeven vanuit poort 2 aan  $R_2$  want het netwerk is verliesvrij:

$$P_u = \frac{1}{2} \frac{|U_2|^2}{R_2} = P_i = \frac{1}{2} \frac{R_i}{(R_1 + R_i)^2 + X_i^2} \cdot |U_0|^2 \tag{2.10}$$

Bij optimale aanpassing, d.w.z.  $Z_i = R_1$ , levert de bron:

$$P_{max} = \frac{|U_0|^2}{8R_1}$$

Dus:

$$P_u = P_i \leq P_{max} \tag{2.11}$$

Met  $Z_i \neq R_1$  is er dus een 'onbenut' vermogen  $P_o$  dat wordt gereflekteerd:

$$P_o = P_{max} - P_i \quad (2.12)$$

$$P_o = \frac{(R_1 - R_i)^2 + X_i^2}{(R_1 + R_i)^2 + X_i^2} \cdot \frac{|U_0|^2}{8R_1} \quad (2.13)$$

$$= \frac{|R_1 - Z_i|^2}{|R_1 + Z_i|^2} \cdot P_{max} \rightarrow \frac{P_o}{P_{max}} = \frac{|R_1 - Z_i|^2}{|R_1 + Z_i|^2} \quad (2.14)$$

Formule (2.13) volgt uit de formules (2.10) en (2.12). Er volgt nu:

$$\frac{P_i}{P_{max}} = \frac{P_u}{P_{max}} = \left| \frac{U_2}{U_0} \right|^2 \cdot \frac{4R_1}{R_2} = |T(j\omega)|^2 \leq 1 \quad (2.15)$$

$T(j\omega)$  noemen we een vermogensoverdrachtsfunctie. We noemen  $\rho(j\omega)$  de ingangsreflektiecoëfficiënt, met:

$$\rho(j\omega) = \frac{Z_i(j\omega) - R_1}{Z_i(j\omega) + R_1} \quad (2.16)$$

$$|\rho(j\omega)| \leq 1 \quad (2.17)$$

Uit het voorgaande volgt de vermogensbalans:

$$T(j\omega) \cdot T(-j\omega) + \rho_i(j\omega) \rho_i(-j\omega) = 1 \quad (2.18)$$

Verliesvrije filtering werkt nu als volgt:

- Voor een  $\omega$  in een doorlaatband is  $|T(j\omega)| \approx 1$  en  $|\rho_i(j\omega)| \approx 0$ :  
Het maximale bronvermogen wordt bijna geheel aan de belasting overgedragen.
- Voor een  $\omega$  in een sperband is  $|T(j\omega)| \approx 0$  en  $|\rho(j\omega)| \approx 1$ : het maximale bronvermogen wordt vrijwel geheel 'niet benut' of 'gereflekteerd'.

## 2.3 Golfvariabelen

$\rho(j\omega)$  en  $T(j\omega)$  zijn overdrachtsfuncties voor netwerkgrootheden die we nu zullen invoeren.

We definiëren de golfvariabelen  $A_1(j\omega)$  en  $B_1(j\omega)$  als volgt:

$$A_1(j\omega) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\sqrt{R_1}}(U_1 + R_1 I_1) = \frac{U_0}{2\sqrt{R_1}} \quad (2.19)$$

$$B_1(j\omega) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\sqrt{R_1}}(U_1 - R_1 I_1) \quad (2.20)$$



Figure 2.4: de algemene situatie

(zie poort 1 van figuur 2.3).

Er volgt nu direkt:

$$P_{max} = \frac{1}{2} \cdot |A_1(j\omega)|^2 \quad (2.21)$$

Ook volgt dat:

$$B_1(j\omega) = \rho_i A_1(j\omega) \quad (2.22)$$

En:

$$P_o = |\rho_i(j\omega)|^2 \cdot P_{max} = \frac{1}{2} \cdot |B_1(j\omega)|^2 \quad (2.23)$$

En dus:

$$P_i = P_u = P_{max} - P_o = \frac{1}{2} \{ |A_1(j\omega)|^2 - |B_1(j\omega)|^2 \} \quad (2.24)$$

$A_1(j\omega)$  noemen we de 'invalende vermogensgolf' en  $B_1(j\omega)$  de 'gereflekteerde of verstrooide vermogensgolf' aan de ingangspoort.

Deze golven zijn (volgens de definitie) genormeerd ten opzichte van de normeringsweerstand  $R_1$ .

De algemene situatie voor figuur 2.4:

Voor poort 2 kunnen we ook definiëren:

$$A_2 \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\sqrt{R_2}} [U_2 + R_2 I_2] = \frac{U_{20}}{2\sqrt{R_2}} \quad (2.25)$$

$$B_2 \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\sqrt{R_2}} [U_2 - R_2 I_2] \quad (2.26)$$

Stel nu:

$$U_{20} = A_2 = 0, \rightarrow B_2 = \frac{U_2}{\sqrt{R_2}} \quad (2.27)$$

dan wordt met

$$A_1 = \frac{U_{10}}{2\sqrt{R_1}}$$

en

$$T = \frac{U_2}{U_{10}} \cdot \frac{2\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}}$$

$$B_2 = \frac{U_2}{\sqrt{R_2}} = \frac{U_2}{U_{10}} \cdot \frac{2\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}} \cdot \frac{U_{10}}{2\sqrt{R_1}} = T_1(j\omega) \cdot A_1(j\omega) \quad (2.28)$$

**SAMENVATTEND:**

$$\rho_i(j\omega) = \left. \frac{B_1(j\omega)}{A_1(j\omega)} \right|_{A_2(j\omega) = 0} \quad (2.29)$$

$$T(j\omega) = \left. \frac{B_2(j\omega)}{A_1(j\omega)} \right|_{A_2(j\omega) = 0} \quad (2.30)$$

Gebruiken we nu het filter met poort 2 als ingang en poort 1 als uitgang, en  $U_{10}(j\omega) = A_1(j\omega) = 0$  dan kunnen we definiëren:

$$\rho_u = \left. \frac{B_2(j\omega)}{A_2(j\omega)} \right|_{A_1(j\omega) = 0} \quad (2.31)$$

$$T_r(j\omega) = \left. \frac{B_1(j\omega)}{A_2(j\omega)} \right|_{A_1(j\omega) = 0} \quad (2.32)$$

Voor de tweepoort levert dit:

$$\begin{bmatrix} B_1(j\omega) \\ B_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i(j\omega) & T_r(j\omega) \\ T(j\omega) & \rho_u(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(j\omega) \\ A_2(j\omega) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

De gedefinieerde matrix heet de verstrooiingsmatrix (Scattering matrix,  $S$ -matrix), van het netwerk, genormeerd op  $R_1$  en  $R_2$ :

$$B = S \cdot A \quad (2.34)$$

De definitie van de golfvariabelen kunnen we herschrijven:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{R_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 + B_1 \\ A_2 + B_2 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{R_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{R_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 - B_1 \\ A_2 - B_2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

in matrixnotatie:

$$U = R^{\frac{1}{2}}(A + B) \quad (2.36)$$

$$I = R^{-\frac{1}{2}}(A - B) \quad (2.37)$$

Voor elk van de twee poorten kunnen we schrijven:

$$\frac{1}{2}U.I^* = \frac{1}{2}(AA^* - BB^* + BA^* - B^*A) \quad (2.38)$$

$$P = \frac{1}{2}Re(UI^*) = \frac{1}{2}(AA^* - BB^*) = \frac{1}{2}(1 - |\rho|^2)|A|^2 \quad (2.39)$$

Voor de tweepoort kunnen we schrijven in matrixnotatie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(U^T I^*) &= \frac{1}{2}(A^T + B^T)(R^{\frac{1}{2}})^T (R^{-\frac{1}{2}})(A^* - B^*) \\ &= \frac{1}{2}(A^T A^* - B^T B^* + B^T A^* - A^T B^*) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Hieruit:

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{2}Re(U^T I^*) &= \frac{1}{2}(A^T A^* - B^T B^*) \\ &= \frac{1}{2}A^T(1 - S^T S^*)A^* \end{aligned} \quad (2.41)$$

Voor de verliesvrije tweepoort geldt dus:

$$S^T S^* = 1 \quad (2.42)$$

Algemener:

Voor een passieve tweepoort geldt:

$$S^T S^* \leq 1 \quad (2.43)$$

De elementen van  $S$  hebben speciale namen:

$$S_{11} = \frac{B_1}{A_1}(A_2 = 0)$$

is de reflectiefactor van poort 1 t.o.v. de referentieweerstand  $R_1$  wanneer poort 2 met de referentieweerstand  $R_2$  is afgesloten en  $U_2 = 0$ .

$$S_{21} = \frac{B_2}{A_1}(A_2 = 0)$$

is de transmissiefactor (overdrachtsfactor) van poort 1 naar poort 2 wanneer poort 2 met de referentieweerstand is afgesloten en  $U_2 = 0$ .

Dan is verder:

$$P_{uit} = \frac{1}{2}|U_2|^2/R_2 = \frac{1}{2}|A_2 + B_2|^2 = \frac{1}{2}|B_2|^2 \quad (\text{omdat } A_2 = 0) \quad (2.44)$$

En:

$$P_{max} = \frac{1}{8}|U_0|^2/R_1 = \frac{1}{2}|A_1|^2 \quad (2.45)$$

Dus:

$$\frac{P_{uit}}{P_{max}} = \frac{|B_2|^2}{|A_1|^2} = |S_{21}|^2 \quad (2.46)$$

Dezelfde redenering voor  $S_{22}$  en  $S_{12}$  geldt als we de poorten verwisselen.  
Voor verliesvrije tweepoorten geldt dus:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

of:

$$S_{11}S_{11}^* + S_{21}S_{21}^* = 1 \quad (2.47)$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* = 0 \quad (2.48)$$

$$S_{12}S_{11}^* + S_{22}S_{21}^* = 0 \quad (2.49)$$

$$S_{12}S_{12}^* + S_{22}S_{22}^* = 1 \quad (2.50)$$

Uit 2.47 volgt:  $|S_{21}|^2 + |S_{11}|^2 = 1$ .

2.48 en 2.49 volgen uit elkaar door  $j\omega$  te vervangen door  $-j\omega$ .

We krijgen:

$$S_{12}^* = \frac{-S_{21}S_{22}^*}{S_{11}} \text{ en } S_{12} = \frac{-S_{21}^*S_{22}}{S_{11}^*} \quad (\text{mits } S_{11} \neq 0) \quad (2.51)$$

Dit gesubstitueerd levert in 2.50:

$$S_{22}S_{22}^* \left( \frac{S_{21}S_{21}^*}{S_{11}S_{11}^*} + 1 \right) = 1 \quad (2.52)$$

Uit 2.47 en 2.52 volgt:

$$S_{22}S_{22}^* = S_{11}S_{11}^* \quad (2.53)$$

Hieruit volgt met 2.47 en 2.50:

$$S_{12}S_{12}^* = S_{21}S_{21}^* \quad (2.54)$$

Is nu wel  $S_{11} = 0$  dan volgt uit 2.47:  $|S_{21}| = 1$  en met 2.48 volgt:  $|S_{12}| = 1$ , zodat ook in dit geval 2.53 en 2.54 gelden.

Voor  $s = j\omega$  geldt dus dat steeds de reflectiecoëfficiënten dezelfde moduli en de transmissiefactoren dezelfde moduli hebben.

Hieronder volgen enkele stellingen (die we niet zullen bewijzen):

1. De  $S$  -matrix van een reciprook verliesvrij netwerk is symmetrisch:

$$S_{21} = S_{12} \quad (2.55)$$

2. Als we  $j\omega$  vervangen door  $s$  en  $-j\omega$  vervangen door  $-s$ , en  $*$  door  $*$ , dan levert dit voor een verliesvrij netwerk:

$$1 - S^T S^* = 0 \text{ of: } 1 - S^T(s)S(-s) = 0 \text{ of: } S^T(s) = S^{-1}(-s)$$

Ook wel geschreven:

$$S^T = S_*^{-1} \quad (2.56)$$

3. Een verliesvrije tweepoort  $S$  -matrix kan m.b.v. polynomen (in  $s$ ) als volgt worden geschreven:

$$S(s) = \frac{1}{g(s)} \begin{bmatrix} h(s) & \sigma f_*(s) \\ f(s) & -\sigma h_*(s) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

waarin:

$$\sigma = \pm 1 \quad (2.58)$$

$$gg_* = hh_* + ff_* \quad (2.59)$$

$$g(s) = \text{een hurwitzpolynoom} \quad (2.60)$$

Formule 2.57 heet de kanonieke vorm van Belevitch.  $f, g$  en  $h$  worden de Belevitch polynomen genoemd.

Iedere  $S$  -matrix van een passief, verliesvrij tweepoortnetwerk opgebouwd uit een eindig aantal elementen heeft deze vorm.

Omgekeerd:

Voor iedere  $S$  -matrix, geschreven in polynomen  $f, g, h$  en  $\sigma$  die voldoen aan de gegeven eisen, kan een passief, verliesvrij tweepoortnetwerk worden gesynthetiseerd dat deze  $S$  -matrix bezit. Dit vormt een pijler van de netwerksynthese.

4. Nuttig bij het kaskaderen van netwerken is de transmissie matrix  $T$ :

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Uitgedrukt in  $S$  -matrix termen:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} -\det S & S_{11} \\ -S_{22} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

of in Belevitch polynomen:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{f} \begin{bmatrix} \sigma g_* & h \\ \sigma h_* & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

5. Als voor een tweepoort geldt:  $S_{11} = 0$  of: polynoom  $h = 0$  dan wordt:

$$f f_* = g g_* \quad (2.64)$$

of:

$$\left| \frac{f}{g} \right| = 1 \text{ en } \left| \frac{f_*}{g} \right| = 1 \quad (2.65)$$

Formule 2.65 betekent dat  $|S_{21}| = 1$ ,

d.w.z. dat al het beschikbare vermogen aan de belasting wordt overgedragen. De overdracht is reflektievrij, voor alle frekwenties. Zo'n netwerk heet een all-pass netwerk. Omdat  $S_{11} = 0$ , is ook  $S_{22} = 0$ . Het netwerk is aangepast voor alle frekwenties.

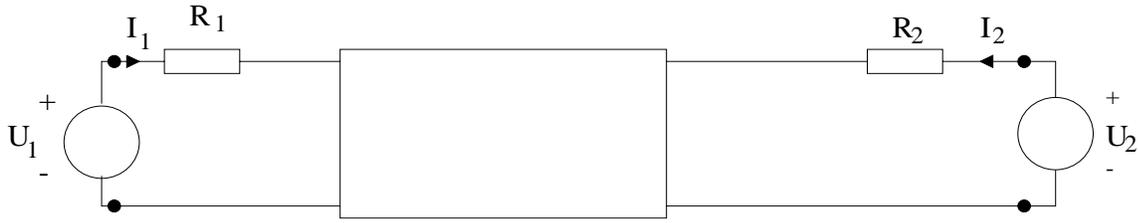


Figure 2.5: aangevuld netwerk op impedantie-basis

## 2.4 Berekening van de S-matrix

De  $S$ -matrix van een tweepoortnetwerk kan worden berekend uit de  $Y$ -matrix (of de  $Z$ -matrix) van een 'aangevuld' netwerk: zie figuur 2.5. We kunnen schrijven:

$$I = R^{-\frac{1}{2}}(A - B) \quad (2.66)$$

$$= R^{-\frac{1}{2}}(1 - S)A \quad (2.67)$$

$$= \frac{1}{2}R^{-\frac{1}{2}}(1 - S)R^{-\frac{1}{2}}U \quad (2.68)$$

of:

$$Y = \frac{1}{2}R^{-\frac{1}{2}}(1 - S)R^{-\frac{1}{2}} \quad (2.69)$$

of:

$$S = 1 - 2R^{\frac{1}{2}}YR^{\frac{1}{2}} \quad (2.70)$$

Voor figuur 2.6 geldt:

$$U = R^{\frac{1}{2}}(A + B) \quad (2.71)$$

$$= R^{\frac{1}{2}}(1 + S)A \quad (2.72)$$

$$= \frac{1}{2}R^{\frac{1}{2}}(1 + S)R^{\frac{1}{2}}I \quad (2.72)$$

zodat:

$$Z = \frac{1}{2}R^{\frac{1}{2}}(1 + S)R^{\frac{1}{2}} \quad (2.73)$$

en:

$$S = 2R^{-\frac{1}{2}}ZR^{-\frac{1}{2}} - 1 \quad (2.74)$$

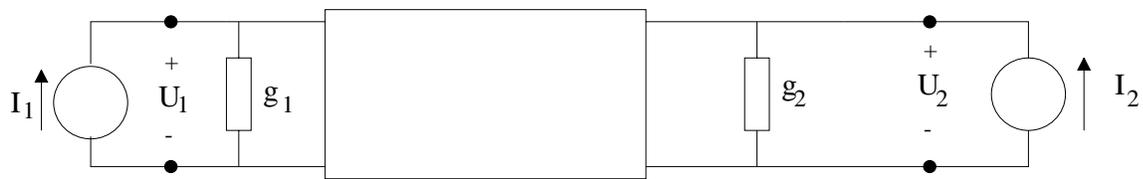


Figure 2.6: aangevuld netwerk op admittantie-basis

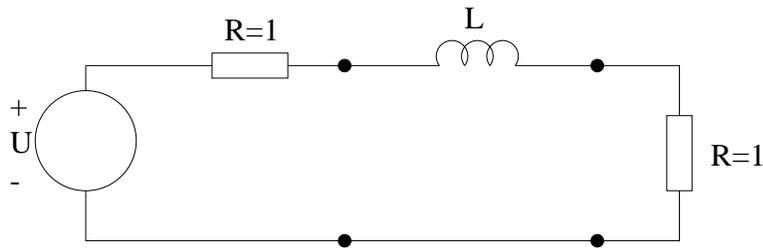


Figure 2.7: eenvoudig voorbeeld

### 2.4.1 Voorbeeld:

#### Voorbeeld:

1. Bereken de  $S$ -matrix voor de verliesvrije tweepoort van figuur 2.7:  
Voor  $R_1 = R_2 = 1\Omega$  wordt vergelijking (2.70) gelijk aan:

$$S = 1 - 2Y$$

Berekening van de  $Y$ -matrix van het aangevulde netwerk levert:

$$Y = \frac{1}{sL + 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt de  $S$ -matrix:

$$S = \frac{1}{sL + 2} \begin{bmatrix} sL & 2 \\ 2 & sL \end{bmatrix}$$

2. Wat zijn de Belevitch-polynomen en  $\sigma$  in dit geval?

$$\left. \begin{aligned} g(s) &= sL + 2 \\ h(s) &= sL \\ f(s) &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Dit klopt want  $gg_* = hh_* + ff_*$ , uitgeschreven:

$$(2 + sL)(2 - sL) = sL \cdot -sL + 4$$

$\sigma$  volgt uit:

$$f = \sigma f_* \Rightarrow 2 = \sigma \cdot 2 \Rightarrow \sigma = +1$$

of uit:

$$h = -\sigma h_* \Rightarrow sL = -\sigma \cdot (-sL) \Rightarrow \sigma = +1$$

3. Hoe zit het met aanpassing van het netwerk voor  $\omega = 0$  en  $\omega \rightarrow \infty$ ?

Hoe volgt dat uit de  $S$ -matrix?

Voor  $\omega = 0$ :

Het netwerk is een doorverbinding:

Volledige vermogensoverdracht  $\rightarrow$  aanpassing.

$$S_{21} = \left. \frac{2}{sL + 2} \right|_{s=0} = 1 \text{ en: } S_{11} = \left. \frac{sL}{sL + 2} \right|_{s=0} = 0 \text{ (geen reflectie).}$$

Voor  $\omega \rightarrow \infty$ :

Het netwerk is een open circuit:  $\rightarrow$  volledige reflectie.

$$S_{21} = \left. \frac{2}{sL + 2} \right|_{\omega \rightarrow \infty} = 0 \text{ en } S_{11} = \left. \frac{sL}{sL + 2} \right|_{\omega \rightarrow \infty} = 1$$

## 2.5 De Tellegen polynomen van verliesvrije tweepoorten

Er bestaat nog een andere methode om te rekenen aan verliesvrije netwerken en begrip te krijgen voor vermogensoverdracht met die netwerken: de beschrijving van verliesvrije netwerken met behulp van de zogenaamde Tellegen polynomen. Hieronder worden ze gedefinieerd en worden de belangrijkste matrices er in uitgedrukt.

Tellegen polynomen:

1. A, B, C, D, H en K zijn polynomen in s met reële coëfficiënten.
2. A, B, en H zijn oneven (even) en C, D en K zijn even (oneven) polynomen in s.
3.  $AB - H^2 = CD - K^2$ .

$$Z = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & H - K \\ H + K & B \end{bmatrix}, Y = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} B & -(H - K) \\ -(H + K) & A \end{bmatrix},$$

$$K = \frac{1}{H+K} \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix},$$

$$S = \frac{1}{A+B+C+D} \begin{bmatrix} (D - C) + (A - B) & 2(H - K) \\ 2(H + K) & (D - C) - (A - B) \end{bmatrix}$$

## 2.5.1 Enkele rekenvoorbeelden met de Tellegen polynomen

### Voorbeeld 1:

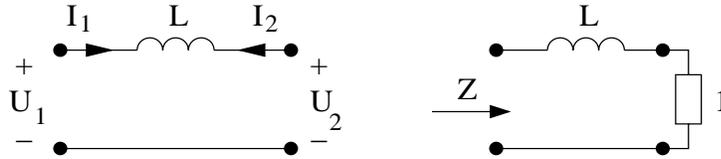


Figure 2.8:

De Y-matrix:

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2$$

$$I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2$$

$$y_{11} : U_2 = 0 \Rightarrow U_1 = sL \cdot I_1 \Rightarrow y_{11} = \frac{1}{sL}$$

$$y_{12} : U_1 = 0 \Rightarrow U_2 = -sL \cdot I_1 \Rightarrow y_{12} = \frac{-1}{sL}$$

$$y_{21} : U_2 = 0 \Rightarrow U_1 = -sL \cdot I_2 \Rightarrow y_{21} = \frac{-1}{sL}$$

$$y_{22} : U_1 = 0 \Rightarrow U_2 = sL \cdot I_2 \Rightarrow y_{22} = \frac{1}{sL}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{sL} & \frac{-1}{sL} \\ \frac{-1}{sL} & \frac{1}{sL} \end{bmatrix} = \frac{1}{sL} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} B & -(H - K) \\ -(H + K) & A \end{bmatrix}$$

Tellegen polynomen:  $D = \text{oneven} = sL$

dus: C, D en K oneven, A, B en H even.

dus:  $A = B = 1$ ,  $H = 1$ ,  $K = 0$  (reciprook)

$$AB - H^2 = CD - K^2 \Rightarrow C = 0.$$

$$S = \frac{1}{2 + sL} \begin{bmatrix} sL & 2 \\ 2 & sL \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt:

$f = 2$ ,  $h = sL$ ,  $g = 2 + sL$ . En:  $\sigma f_* = 2$ , dus:  $\sigma = +1$

Opmerking:

De impedantie  $Z = 1 + sL$  en:  $\rho = \frac{Z-1}{Z+1} = \frac{sL}{2+sL} = S_{11}$

Voorbeeld 2:

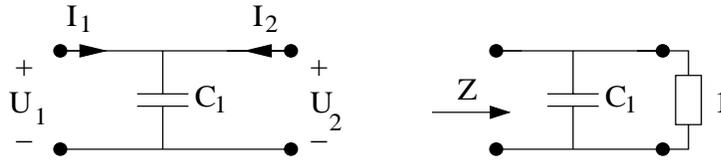


Figure 2.9:

De Z-matrix:

$$U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

$$z_{11} : I_2 = 0 \Rightarrow U_1 = I_1 \cdot \frac{1}{sC_1} \Rightarrow z_{11} = \frac{1}{sC_1}$$

$$z_{12} : I_1 = 0 \Rightarrow U_1 = I_2 \cdot \frac{1}{sC_1} \Rightarrow z_{12} = \frac{1}{sC_1}$$

$$z_{22} : I_1 = 0 \Rightarrow U_2 = I_2 \cdot \frac{1}{sC_1} \Rightarrow z_{22} = \frac{1}{sC_1}$$

$$z_{21} : I_2 = 0 \Rightarrow U_2 = I_1 \cdot \frac{1}{sC_1} \Rightarrow z_{21} = \frac{1}{sC_1}$$

$$Z = \frac{1}{sC_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & (H - K) \\ (H + K) & B \end{bmatrix}$$

Tellegen polynomen:  $C = \text{oneven} = sC_1$

dus:  $C, D$  en  $K$  oneven,  $A, B$  en  $H$  even.

dus:  $A = B = 1, H = 1, K = 0$  (reciprook)

$$AB - H^2 = CD - K^2 \Rightarrow D = 0.$$

$$S = \frac{1}{2 + sC_1} \begin{bmatrix} -sC_1 & 2 \\ 2 & -sC_1 \end{bmatrix}$$

Nu volgt:

$f = 2, h = -sC_1, g = 2 + sC_1$ . Er volgt:  $\rho = +1$ .

Bepaal zelf  $Z$  en daaruit  $\rho$ .

**Voorbeeld 3:**

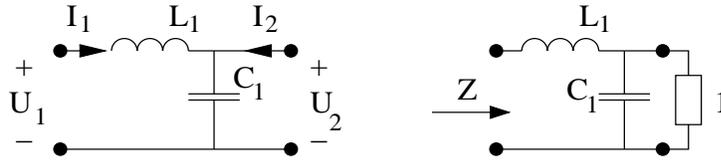


Figure 2.10:

De Z-matrix:

$$U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

$$z_{11} : I_2 = 0 \Rightarrow U_1 = (sL_1 + \frac{1}{sC_1})I_1 \Rightarrow z_{11} = sL_1 + \frac{1}{sC_1}$$

$$z_{12} : I_1 = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{1}{sC_1}I_2 \Rightarrow z_{12} = \frac{1}{sC_1}$$

$$z_{21} : I_2 = 0 \Rightarrow U_2 = \frac{1}{sC_1}I_1 \Rightarrow z_{21} = \frac{1}{sC_1}$$

$$z_{22} : I_1 = 0 \Rightarrow U_2 = \frac{1}{sC_1}I_2 \Rightarrow z_{22} = \frac{1}{sC_1}$$

$$Z = \begin{bmatrix} sL_1 + \frac{1}{sC_1} & \frac{1}{sC_1} \\ \frac{1}{sC_1} & \frac{1}{sC_1} \end{bmatrix} = \frac{1}{sC_1} \begin{bmatrix} 1 + s^2L_1C_1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tellegen polynomen: C = oneven =  $sC_1$

dus: C, D en K oneven, A, B en H even, K = 0 (reciprook)

dus: A =  $1 + s^2L_1C_1$ , B = 1, H = 1, D =  $sL_1$ .

$$S = \frac{1}{2 + s(L_1 + C_1) + s^2L_1C_1} \begin{bmatrix} s(L_1 - C_1) + s^2L_1C_1 & 2 \\ 2 & s(L_1 - C_1) - s^2L_1C_1 \end{bmatrix}$$

Nu volgt:

$$f = 2, h = s(L_1 - C_1) + s^2L_1C_1,$$

$$g = 2 + s(L_1 + C_1) + s^2L_1C_1 \text{ en } \rho = +1.$$

**Voorbeeld 4:**

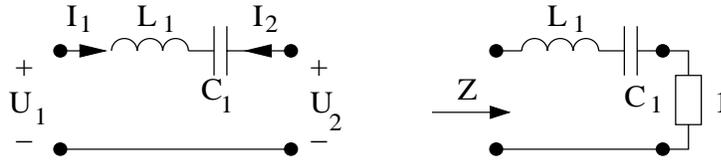


Figure 2.11:

De Y-matrix:

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2$$

$$I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2$$

$$\begin{aligned}
 y_{11} : \quad U_2 = 0 &\Rightarrow U_1 = \left(sL_1 + \frac{1}{sC_1}\right) \cdot I_1 &\Rightarrow y_{11} = \frac{sC_1}{1+s^2L_1C_1} \\
 y_{12} : \quad U_1 = 0 &\Rightarrow U_2 = -I_1 \left(sL_1 + \frac{1}{sC_1}\right) &\Rightarrow y_{12} = \frac{-sC_1}{1+s^2L_1C_1} \\
 y_{21} : \quad U_2 = 0 &\Rightarrow U_1 = -I_2 \left(sL_1 + \frac{1}{sC_1}\right) &\Rightarrow y_{21} = \frac{-sC_1}{1+s^2L_1C_1} \\
 y_{22} : \quad U_1 = 0 &\Rightarrow U_2 = I_2 \left(sL_1 + \frac{1}{sC_1}\right) &\Rightarrow y_{22} = \frac{sC_1}{1+s^2L_1C_1}
 \end{aligned}$$

$$Y = \frac{1}{1 + s^2L_1C_1} \begin{bmatrix} sC_1 & -sC_1 \\ -sC_1 & sC_1 \end{bmatrix}$$

Tellegen polynomen:  $D = \text{even} = 1 + s^2L_1C_1$

dus: C, D en K even, A, B en H oneven.

dus:  $A = B = H = sC_1$ ,  $K = 0$  (reciprook)

$$AB - H^2 = CD - K^2 \Rightarrow C = 0.$$

$$S = \frac{1}{1 + 2sC_1 + s^2L_1C_1} \begin{bmatrix} 1 + s^2L_1C_1 & 2sC_1 \\ 2sC_1 & 1 + s^2L_1C_1 \end{bmatrix}$$

Nu volgt:

$f = 2sC_1$ ,  $h = 1 + s^2L_1C_1$ ,  $g = 1 + 2sC_1 + s^2L_1C_1$  en  $\rho = -1$ .

### 2.5.2 Eigenschappen van de ladderfilters

Een belangrijke eigenschap van de laddernetwerken die de Butterworth, Chebyshev en rationale funktie benadering realiseren dient hier te worden vermeld. Deze eigenschap volgt uit de bestudering van de  $S$ -matrix polynomen  $f$ ,  $g$  en  $h$  van deze netwerken en de gevolgen die dit heeft voor de Tellegen-polynomen van die netwerken. (De laddernetwerken zijn allemaal reciprook, dus voor het Tellegen-polynoom  $K$  geldt altijd:  $K \equiv 0$ ).

Voor oneven orde geldt:

polynoom  $g$ : oneven orde, Hurwitz polynoom in engere zin,  
polynoom  $h$ : oneven polynoom, alle reflectie nulpunten liggen op de imaginaire as,  
polynoom  $f$ : even polynoom.

Uit het oneven zijn van  $h$  volgt voor de Tellegen-polynomen:  $A=B$ . Hieruit volgt dat de oneven orde laddernetwerken een symmetrische  $Z$ - en  $Y$ -matrix hebben.

Voor de Butterworth en Chebyshev laddernetwerken van oneven orde betekent dit dat de netwerken zelf ook symmetrisch zijn.

Voor even orde geldt:

polynoom  $g$ : even orde, Hurwitz polynoom in engere zin,  
polynoom  $h$ : even polynoom, alle reflectienulpunten liggen op de imaginaire as, maar niet in de oorsprong.  
polynoom  $f$ : even polynoom.

Uit het even zijn van  $h$  volgt voor de Tellegen-polynomen:  $C=D$ . De gevolgen hiervan voor de  $Z$ -  $Y$ - en  $K$ -matrix zijn duidelijk. Deze netwerken worden door deze eigenschap antimetrisch genoemd.

## 2.6 Uitgewerkte vraagstukken

### Vraagstuk 1:

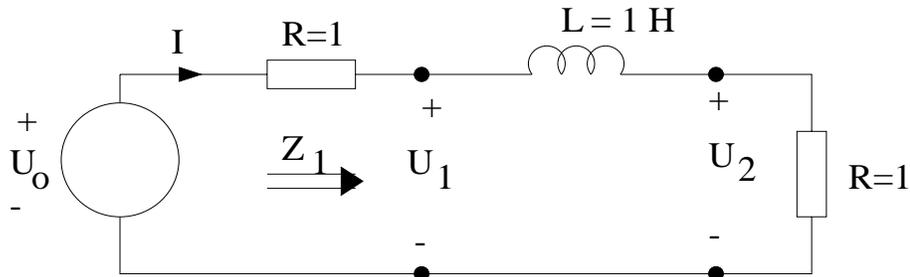


Figure 2.12: figuur bij vraagstuk 1

### bij hoofdstuk 2.1:

Voor  $\omega = 0$ : Dan is  $Z_1 = 1\Omega$ . Er is dus maximale vermogensoverdracht.

$$\text{dus: } \frac{P}{P_{max}} = 1 \quad \text{en: } P_{max} = \frac{U_0^2}{8}$$

Voor  $\omega \rightarrow \infty$ : Dan is  $Z_1 \rightarrow \infty$ . Er is dus géén vermogensoverdracht.

$$\text{dus: } \frac{P}{P_{max}} = 0 \quad \text{en: } \frac{P_{refl}}{P_{max}} = 1$$

### bij hoofdstuk 2.2:

$$I = \frac{U_0}{2 + j\omega} \quad \text{en: } U_2 = 1 \cdot I = \frac{U_0}{2 + j\omega} \Rightarrow \frac{U_2}{U_0} = \frac{1}{2 + j\omega}$$

Dus:

$$\left| \frac{U_2}{U_0} \right|^2 \cdot 4 = \frac{4}{4 + \omega^2} = |T(j\omega)|^2 = \frac{2 \cdot 2}{(2 + j\omega)(2 - j\omega)}$$

Hieruit volgt:

$$\underline{\underline{T(s) = \frac{2}{2 + s}}} \quad (\text{want } \frac{-2}{2 + s} \text{ voldoet niet!})$$

Ook is:

$$\rho(j\omega) = \frac{Z_1 - 1}{Z_1 + 1} = \frac{j\omega}{2 + j\omega} \Rightarrow |\rho(j\omega)|^2 = \frac{\omega^2}{4 + \omega^2} = \frac{j\omega \cdot -j\omega}{(2 + j\omega)(2 - j\omega)}$$

$$\rho(s) = \frac{\frac{+s}{2+s}}{\frac{+s}{2+s}} \Rightarrow \underline{\underline{\rho(s) = \frac{s}{2+s}}} \quad (\text{want het - teken voldoet niet})$$

We kunnen hier de vermogensbalans controleren:

$$|T(j\omega)|^2 + |\rho(j\omega)|^2 = 1 \Rightarrow \frac{4}{4 + \omega^2} + \frac{\omega^2}{4 + \omega^2} = 1 \quad \text{en:} \quad \frac{2}{2+s} \cdot \frac{2}{2-s} + \frac{s}{2+s} \cdot \frac{-s}{2-s} = 1$$

bij hoofdstuk 2.3:

$$A_1(j\omega) = \frac{U_0}{2}, \quad B_1(j\omega) = \rho_1 A_1 = \frac{j\omega}{2 + j\omega} \cdot \frac{U_0}{2}, \quad P_{max} = \frac{|A_1(j\omega)|^2}{2} = \frac{U_0^2}{8}$$

$$P_{onbenut} = |\rho_1(j\omega)|^2 \cdot P_{max} = \frac{|B_1(j\omega)|^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{4 + \omega^2} \cdot \frac{U_0^2}{4}$$

$$P_i = P_{max} - P_{onbenut} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_0^2}{4} - \frac{\omega^2}{4 + \omega^2} \cdot \frac{U_0^2}{4} \right\}$$

Algemene conclusie:

$$\rho_1(s) = \rho(s) = \frac{s}{2+s} \quad \text{en} \quad T_1(s) = \frac{2}{2+s}$$

Het netwerk is reciproom dus:

$$T_2(j\omega) = T_1(j\omega) \Rightarrow T_2(s) = \frac{2}{2+s}$$

Belevitch polynomen:

$$T_1 = \frac{2}{2+s} = \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{\sigma f_*(s)}{g(s)} \Rightarrow g(s) = 2+s, f(s) = 2, \sigma = +1.$$

Uit  $\rho_1(s)$  volgt:  $h(s) = s$ .

Controle:  $gg_* = hh_* + ff_* \Rightarrow (2+s)(2-s) = s \cdot -s + 2 \cdot 2$

$$S = \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} s & 2 \\ 2 & s \end{bmatrix} \Rightarrow S^T = \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} s & 2 \\ 2 & s \end{bmatrix} \quad \text{en:} \quad S_* = \frac{1}{-s+2} \begin{bmatrix} -s & 2 \\ 2 & -s \end{bmatrix}$$

$$S^T \cdot S_* = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{-s+2} \begin{bmatrix} s & 2 \\ 2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s & 2 \\ 2 & -s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vraagstuk 2:

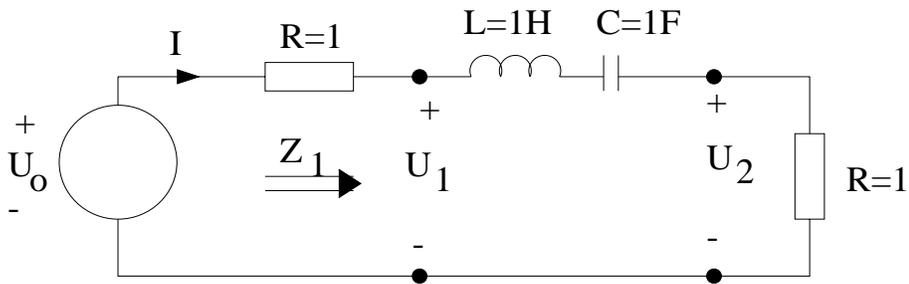


Figure 2.13: netwerk van vraagstuk 2

bij hoofdstuk 2.1:

Voor  $\omega = 0$  :

$$Z_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{P}{P_{max}} = 0 \Rightarrow \frac{P_{refl}}{P_{max}} = 1.$$

Voor  $\omega_1 = 1$  (resonantiefrekwentie van de seriekring):

$$Z_1 = 1\Omega \Rightarrow \frac{P}{P_{max}} = 1 \quad \text{en} \quad P_{max} = \frac{U_0^2}{8}$$

Voor  $\omega \rightarrow \infty$  :      zelfde als bij  $\omega = 0$ .

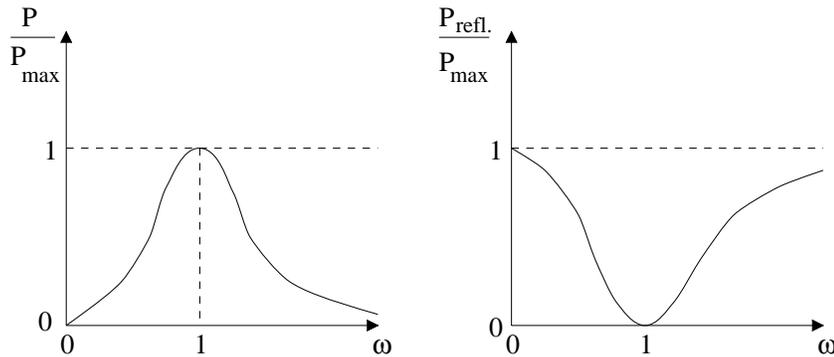


Figure 2.14:

bij hoofdstuk 2.2:

$$I = \frac{U_0}{2 + j\omega + \frac{1}{j\omega}} \quad U_2 = 1 \cdot I \Rightarrow \frac{U_2}{U_0} = \frac{1}{2 + j\omega + \frac{1}{j\omega}}$$

$$|T(j\omega)|^2 = 4 \cdot \left| \frac{U_2}{U_0} \right|^2 = \frac{4}{4 + (\omega - \frac{1}{\omega})^2} \quad (=1 \text{ voor } \omega_1 = 1)$$

Hieruit:

$$T(s) = \frac{2}{2 + s + \frac{1}{s}} = \frac{2s}{s^2 + 2s + 1}$$

en:

$$\rho(j\omega) = \frac{Z_1 - 1}{Z_1 + 1} = \frac{j\omega + \frac{1}{j\omega} + 1 - 1}{j\omega + \frac{1}{j\omega} + 1 + 1} = \frac{j(\omega - \frac{1}{\omega})}{2 + j(\omega - \frac{1}{\omega})}$$

$$\Rightarrow |\rho(j\omega)|^2 = \frac{(\omega - \frac{1}{\omega})^2}{4 + (\omega - \frac{1}{\omega})^2} \quad (=0 \text{ voor } \omega_1 = 1)$$

Vermogensbalans:

$$|T(j\omega)|^2 + |\rho(j\omega)|^2 = 1.$$

bij hoofdstuk 2.3:

$$T_1(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 1} \quad \text{en} \quad \rho_1(s) = \frac{s + \frac{1}{s}}{s + \frac{1}{s} + 2} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

Het netwerk is reciprook.

Op dezelfde manier als in het vorige vraagstuk volgen:

$$\left. \begin{array}{l} f(s) = 2s \\ h(s) = s^2 + 1 \\ g(s) = s^2 + 2s + 1 \\ \sigma = -1 \end{array} \right\} S = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s^2 + 1 & 2s \\ 2s & s^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Deze matrix kan ook berekend worden m.b.v. de Z- of Y-matrix van het "aangevulde netwerk".

**Vraagstuk 3:**

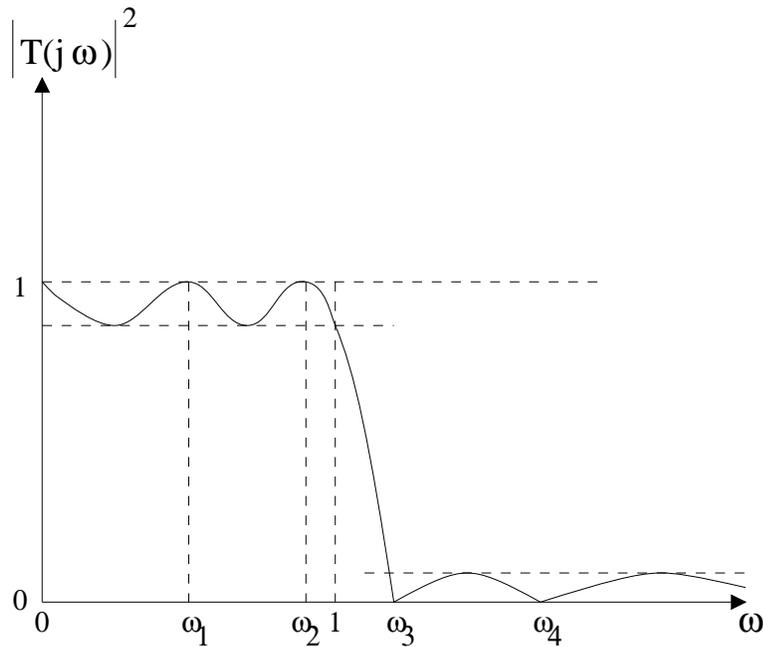


Figure 2.15: figuur bij vraagstuk 3

Voor  $\omega=0$ ,  $\omega_1$  en  $\omega_2$  is  $|T(j\omega)|^2 = 1$

Voor die frekwenties is er dus maximale vermogensoverdracht.

Conclusies:

1. Bron en belasting hebben dezelfde weerstandswaarde (die we normeren op  $1\Omega$ ).
2. Voor  $\omega = 0$ ,  $\omega_1$  en  $\omega_2$  is  $|\rho(j\omega)|^2 = 0$  dus geen reflectie.
3. Tussen  $\omega = 0$  en  $1$  is  $|T(j\omega)|^2 \approx 1$  (de doorlaatband).
4. Voor  $\omega = \omega_3$  en  $\omega_4$  is  $|T(j\omega)|^2 = 0$ , dus geen vermogensoverdracht.  
dus:  $|\rho(j\omega)|^2 = 1$  (Totale reflectie voor die frekwenties).

**Vraagstuk 4:**

Gegeven is het onderstaand netwerk. De parallelkring heeft de resonantiefrequentie  $\omega_1$ .

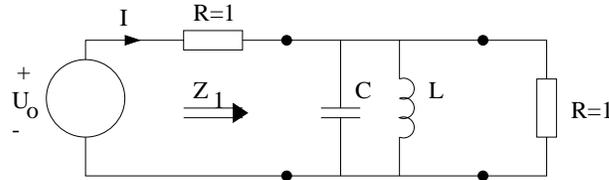


Figure 2.16:

- Voor welke radiaalfrequentie is er volledige reflectie of aanpassing tussen bron en belasting?

**Antwoord:**

1. Alleen bij  $\omega = \omega_1$  is  $Z_1 = R_1$ , dus alleen voor  $\omega = \omega_1$  is er volledige aanpassing.
  2. Bij  $\omega = 0$  en  $\infty$  is  $Z_1 = 0$ . Voor  $\omega_1 = 0$  en  $\infty$  is er dus volledige reflectie.
- Geef een schets van het verloop van  $\frac{P}{P_{max}}$ .

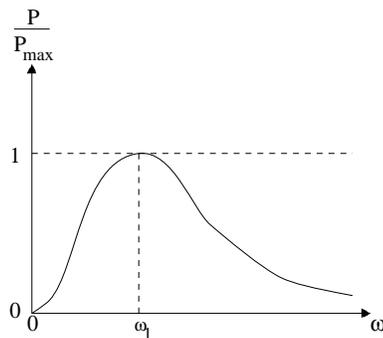


Figure 2.17:

**Vraagstuk 5:**

Gegeven is onderstaand niet-reciprook netwerk:

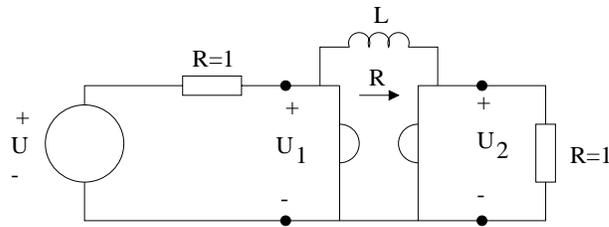


Figure 2.18:

- Bepaal de  $S$ -matrix van het verliesvrije netwerk met behulp van de Tellegenpolynomen.

Uitwerking:

De definitie van de gyrator is in de figuur gegeven:

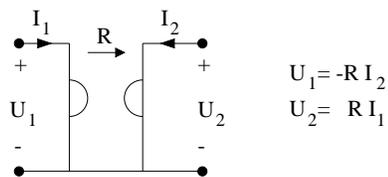


Figure 2.19: definitie gyrator

Na enig rekenwerk vinden we voor het netwerk van de gyrator met een zelfinductie overbrugd:

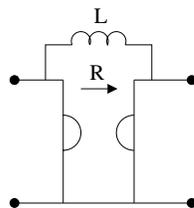


Figure 2.20:

de  $Y$ -matrix:

$$Y = \frac{1}{j\omega LR} \begin{bmatrix} R & -(R - j\omega L) \\ -(R + j\omega L) & R \end{bmatrix}$$

**Conclusie:**

$$\left. \begin{array}{l} A = R \\ B = R \\ D = j\omega LR \end{array} \right\} \begin{array}{l} H + K = R + j\omega L \\ H - K = R - j\omega L \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} H = R \\ K = j\omega L \end{array}$$

- uit  $AB - H^2 = CD - K^2$  volgt:  $C = \frac{j\omega L}{R}$

Nu ingevuld:

$$S = \frac{1}{2R + j\omega L(R + \frac{1}{R})} \begin{bmatrix} j\omega L(R - \frac{1}{R}) & 2(R - j\omega L) \\ 2(R + j\omega L) & j\omega L(R - \frac{1}{R}) \end{bmatrix}$$

- Bespreek de situatie als  $R = 1$ .

Dan wordt:

$$S = \frac{1}{2 + 2j\omega L} \begin{bmatrix} 0 & 2 - 2j\omega L \\ 2 + 2j\omega L & 0 \end{bmatrix} \quad \text{of:} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2-2j\omega L}{2+2j\omega L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. De tweepoort heeft voor  $R = 1$  aan beide poorten geen reflectie.
2.  $S_{21} = 1$  d.w.z.  $\left. \frac{B_2}{A_1} \right|_{A_2=0} = 1$ , de overdracht van bron naar belasting is identiek 1, voortdurend maximaal.
- 3.

$$S_{12} = \frac{2 - 2j\omega L}{2 + 2j\omega L} = \left. \frac{B_1}{A_2} \right|_{A_1=0},$$

d.w.z. de overdracht van poort 2 naar poort 1 is een all-pass functie:  
 $|S_{12}|^2 = 1$ .

**Vraagstuk 6:**

We gaan het aangepaste, frekwentie-onafhankelijke, verliesvrije drie-poort netwerk onderzoeken.

Hiervan is de  $S$ -matrix:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{referentie weerstanden } R_1, R_2, R_3).$$

De verliesvrijheidseis:

$$S^T \cdot S = 1$$

levert hier:

$$|S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = |S_{12}|^2 + |S_{32}|^2 = |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1$$

en:

$$S_{31} \cdot S_{32} = S_{12} \cdot S_{13} = S_{21} \cdot S_{23} = 0.$$

Hieruit volgt dat niet alle matrixkomponenten nul kunnen zijn.

Stel  $S_{12} \neq 0$ , dan volgt:

$$S_{13} = 0 \Rightarrow |S_{23}| = 1 \Rightarrow S_{21} = 0 \Rightarrow |S_{31}| = 1 \Rightarrow S_{32} = 0 \Rightarrow |S_{12}| = 1.$$

Hieruit volgt ook dat het netwerk niet-reciprook is ( $S_{21} \neq S_{12}$ ).

Kiezen we steeds het + teken waar we dat kunnen, dan hebben we daarmee de  $S$ -matrix gedefinieerd van een drie-poort netwerk met de naam: CIRCULATOR:

$$S_{circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In figuur 2.21 is het circulator-symbool getekend.

Als een bron wordt aangesloten aan poort 1, en de poorten 2 en 3 worden afgesloten met impedanties  $Z_2$  en  $Z_3$  (en daardoor met reflecties  $S_2$  en  $S_3$ ) volgt uit de matrix (en uit figuur 2.21) dat geldt:

$$a_2 = S_2 \cdot b_2, \quad a_3 = S_3 \cdot b_3, \quad \Rightarrow \quad b_1 = S_2 \cdot S_3 \cdot a_1.$$

Hiermee hebben we de mogelijkheid om reflectie-functies in stukken te splitsen. Dit blijkt later (bij de vertaling van de Jauman structuur van nut te zijn.

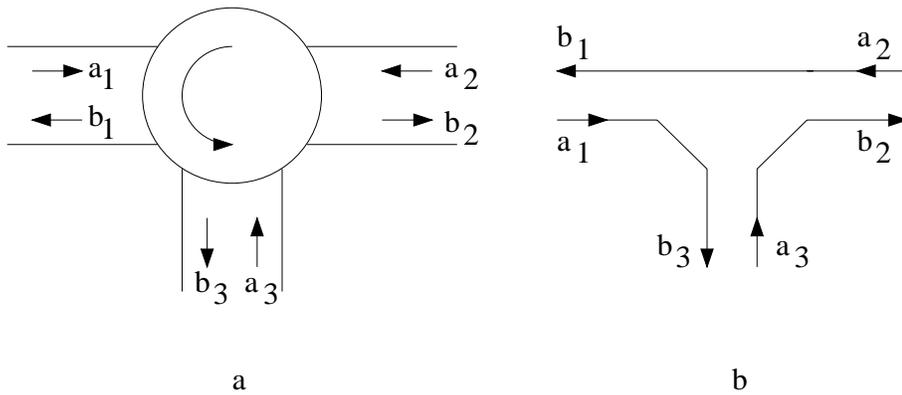


Figure 2.21: de circulator

**Vraagstuk 7:**

Van het netwerk uit figuur 2.22 is ook de vermogensoverdracht gegeven. De Belevitch polynomen zijn  $f$ ,  $g$  en  $h$ .

**Gevraagd:**

1. Hoe noemt u deze karakteristiek?

een bandsperkarakteristiek.

2. Voor welke radiaalfrekwenties  $\omega$  heeft  $f/g$  een nulpunt?  
en voor welke  $\omega$  heeft  $h/g$  een nulpunt?

$$\frac{f}{g} = 0 \quad \text{voor} \quad \Omega = \Omega_3, \Omega_5, \Omega_7.$$

$$\frac{h}{g} = 0 \quad \text{voor} \quad \Omega = 0, \Omega_2, \Omega_8, \infty.$$

3. Teken het verloop van  $|S_{22}(j\omega)|^2$  voor het netwerk, zie figuur 2.23.

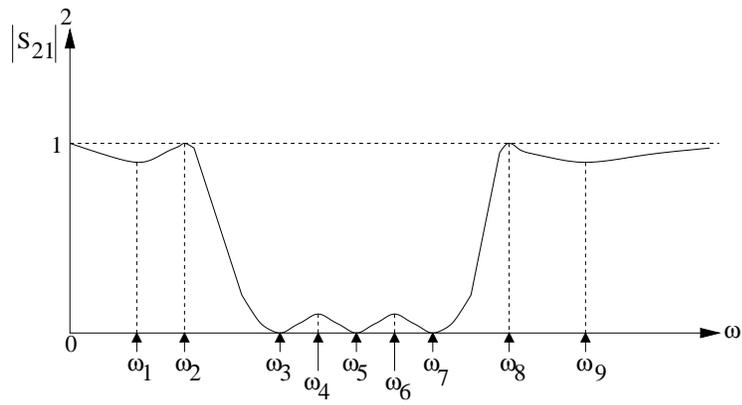
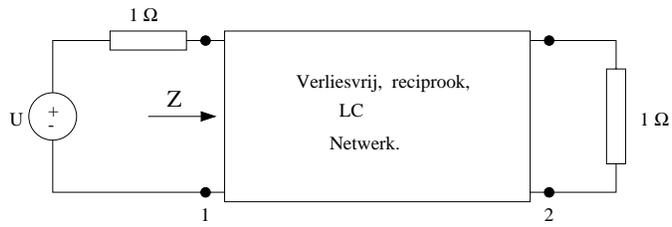


Figure 2.22:

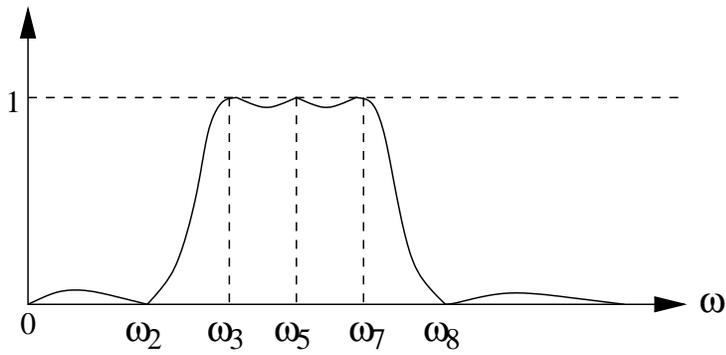


Figure 2.23:

**Vraagstuk 8:**

Een verliesvrij, reciproom netwerk, afgesloten in weerstanden, heeft de reflectie karakteristiek aan poort 1 van figuur 2.24. Stel, dit netwerk wordt beschreven met de Belevitch polynomen  $f$ ,  $g$  en  $h$  en de konstante  $\sigma$ :

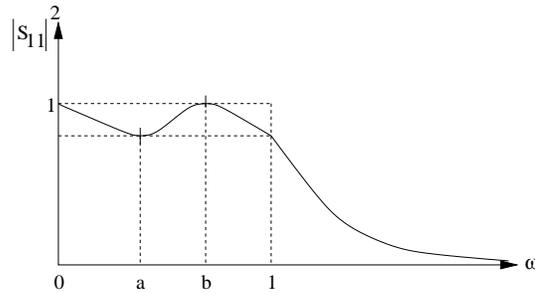


Figure 2.24:

1. Geef aan voor welke  $\omega$  de functies  $f/g$  en  $h/g$  nul zijn.

$$\frac{f}{g} = 0 \quad \text{voor} \quad \Omega = 0, b.$$

$$\frac{h}{g} = 0 \quad \text{voor} \quad \Omega = \infty.$$

2. Teken de bijbehorende  $|S_{12}|^2$ . (figuur 2.25)

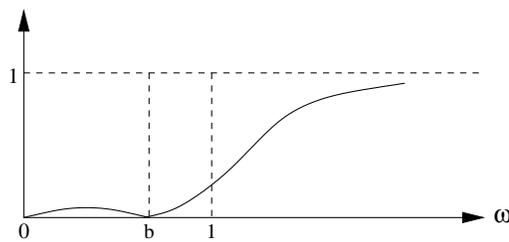


Figure 2.25:

3. In figuur 2.26 zijn enkele netwerken getekend. Geef aan welke structuur de getekende  $|S_{11}|^2$  zou kunnen realiseren en motiveer uw keuze.

Het gaat om een hoogdoorlaatkarakteristiek, de netwerken a en c vallen dus af (laagdoorlaat netwerken). Bij  $\omega = b$  moet er een overdrachtsnulpunt zijn, dit kan alleen met netwerk d!

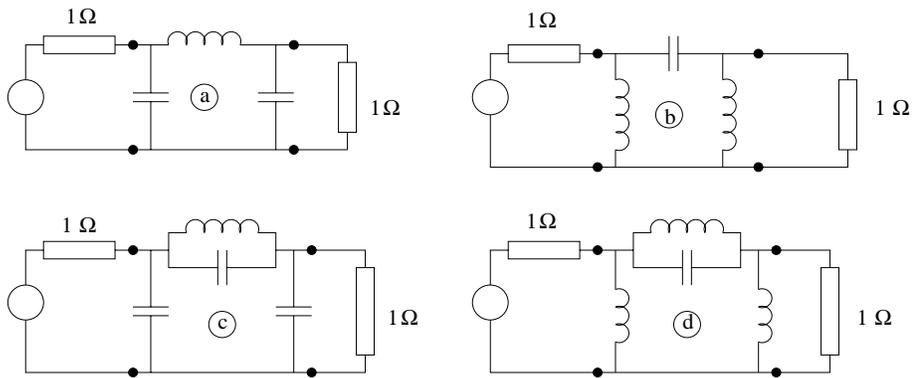


Figure 2.26:

**Vraagstuk 9:**

Gegeven is het netwerk van figuur 2.27.

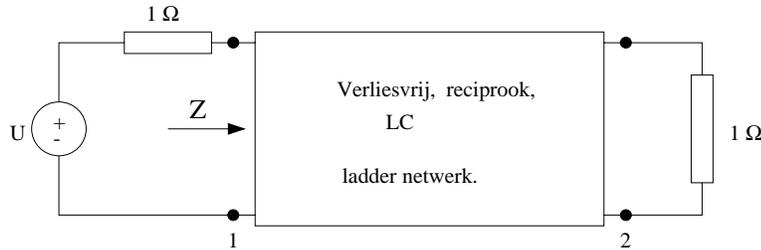


Figure 2.27:

Van de impedantie  $Z$  is gegeven: ( $0 < a < b < c < d < e < \infty$ )

$$Z = 1\Omega \quad \text{voor } \omega = b, c, d$$

$$Z = 0 \quad \text{voor } \omega = 0, \infty,$$

$$Z = \text{imaginair} \quad \text{voor } \omega = a, e$$

**Gevraagd:**

1. Teken  $|S_{11}(j\omega)|^2$ ,  $|S_{22}(j\omega)|^2$  en  $|S_{12}(j\omega)|^2$  als functie van  $\omega$  (zie figuur 2.28)

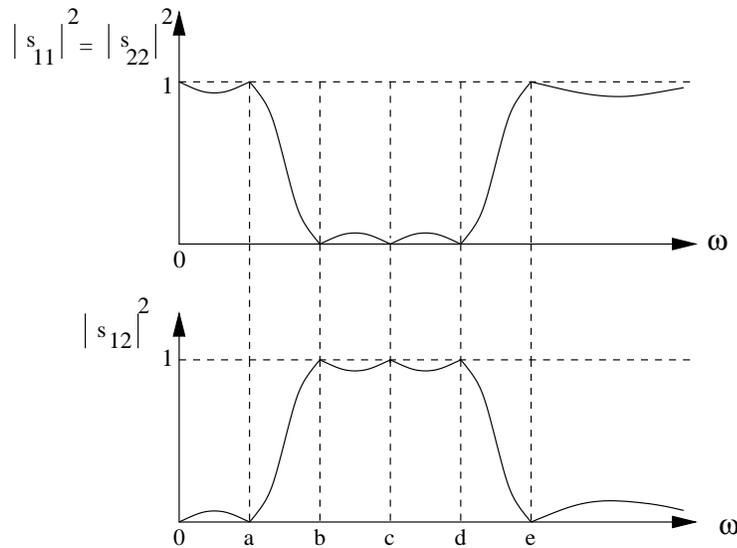


Figure 2.28:

2. Het netwerk is ontstaan via laagdoorlaat- naar banddoorlaat transformatie van één van de netwerken uit figuur 2.29.

Welk netwerk kiest u? Waarom?

De overdracht is die van een bandgetransformeerde van een derde orde Cauer laagdoorlaat type:  $\omega = c$  is dan de centrale frekwentie,  $\omega = a$  en  $e$  zijn afkomstig van de ene dempingspool. We kiezen dus netwerk c.

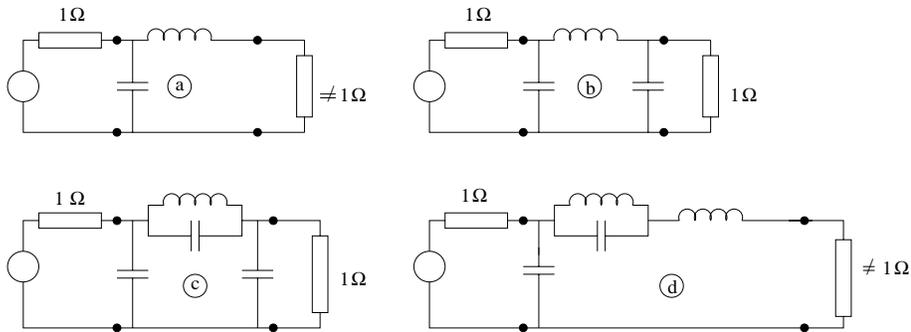


Figure 2.29:

Vraagstuk 10:

Gegeven is het netwerk van figuur 2.30. De serie-resonantiekring heeft de resonantie frekwentie  $\omega_1$ .

1. Voor welke  $\omega$  is er volledige aanpassing of volledige reflectie tussen bron en belasting?

Volledige belasting is er bij  $\omega = \omega_1$ .

Volledige reflectie is er bij  $\omega = 0$  en  $\omega = \infty$ .

2. Geef een schets van het verloop van  $p/p_{max}$  (zie figuur 2.31).

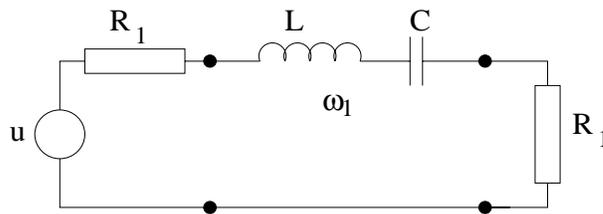


Figure 2.30:

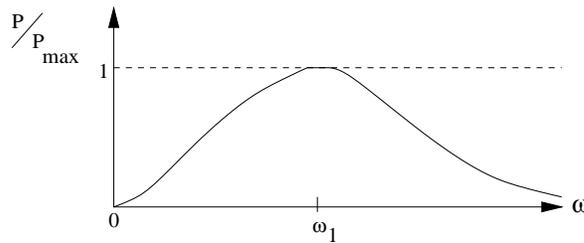


Figure 2.31:

Vraagstuk 11:

Bepaal voor het netwerk van figuur 2.32 de reflectiecoëfficiënt  $\rho(j\omega)$  en de transmissie  $T(j\omega)$  aan poort 1.

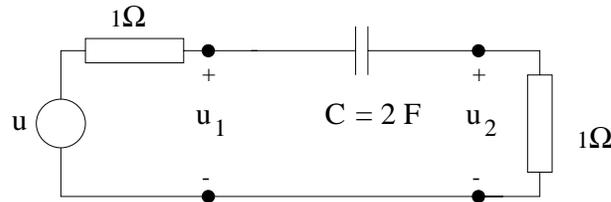


Figure 2.32:

Bereken zelf via Tellegen polynomen:

$$S = \frac{1}{4s + 1} \begin{bmatrix} 1 & 4s \\ 4s & 1 \end{bmatrix}$$

Vraagstuk 12:

Van een verliesvrije tweepoort is gegeven:

De Belevitch polynomen zijn:  $f=1$ ,  $g=2s+1$ ,  $h=-2s$  en  $\sigma=-1$ .

Wordt hiermee een verliesvrij, reciproom netwerk beschreven?

Voor reciprociteit moet gelden:  $f = \sigma f_*$ . Dit is niet het geval, dus niet reciproom.

Vraagstuk 13:

Van een verliesvrij, reciproom netwerk (afgesloten in weerstanden van  $1\Omega$ ) is gegeven:

$$S_{21}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

1. Bepaal hieruit de Belevitch polynomen  $f$ ,  $g$  en  $h$  en de constante  $\sigma$ . Er zijn 2 mogelijkheden).

Er volgt meteen:  $g = s^2 + \sqrt{2}s + 1$  en  $f = s^2$

$\sigma$  volgt uit:  $f = \sigma f_*$ :  $\sigma = +1$ .

$h$  volgt uit:  $g.g_* = f.f_* + h.h_*$ :  $h = \pm 1$ .

2. Geef de volledige  $S$ -matrix. (2x).

$$S_1 = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \begin{bmatrix} 1 & s^2 \\ s^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \begin{bmatrix} -1 & s^2 \\ s^2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Geef een netwerkrealisatie door eerst de ingangsimpedantie  $Z$  (van het afgesloten netwerk) te berekenen.

Uit  $\rho = \frac{Z-1}{Z+1}$  volgt:  $Z = \frac{1+\rho}{1-\rho}$  met  $\rho = s_{11}$ .

Mogelijkheid 1:(figuur 2.33)

$$Z = \frac{s^2 + \sqrt{2}s + 2}{s^2 + \sqrt{2}s} = \frac{\sqrt{2}}{s} + \frac{s}{s + \sqrt{2}}$$

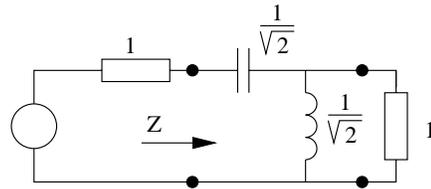


Figure 2.33:

Mogelijkheid 2:

$$Y = \frac{s^2 + \sqrt{2}s + 2}{s^2 + \sqrt{2}s} = \frac{\sqrt{2}}{s} + \frac{s}{s + \sqrt{2}}$$

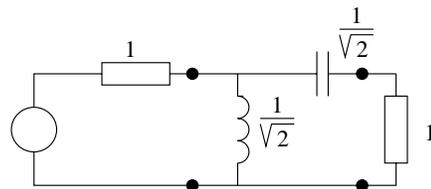


Figure 2.34:

## Chapter 3

# Synthese

### 3.1 Inleiding

Het doel van synthese kan als volgt worden omschreven:

1. Het aangeven van de noodzakelijke en voldoende voorwaarden waaraan rationale functies in  $s$  (of  $z$ ) (of stelsels polynomen in  $s$  of  $z$ ) moeten voldoen om realisatie in de vorm van een netwerk mogelijk te maken.
2. Het aangeven van de methode die gevolgd moet worden om onder die voorwaarden aan dat netwerk te komen.

Er bestaan verschillende soorten netwerken die op zeker moment in de tijd belangrijk zijn of waren.

Hieronder volgt (een vrij willekeurige) opsomming van soorten netwerken:

1. *Één*poort, geaarde tweepoort, tweepoort,  $n$ -poort.
2. Netwerken bestaande uit analoge, tijdscontinue elementen of tijdsdiskrete elementen.
3. Passief, verliesvrij, orthogonaal.
4. Reciprook, niet-reciprook.
5. Bestaand uit slechts 2 typen elementen (minimaal aantal?): (L-C, L-R, R-C).
6. Alleen bestaand uit de elementen R,L en C. (en dus *géén* transformatoren en gyratoren).
7. Ladderstructuur.
8. Kaskade van  $1^e$ ,  $2^e$  (en eventueel  $4^e$ ) orde secties.

## 9. Meerdimensionale netwerken.

Historisch gezien begint de synthesesetheorie met de studie van de tijdscontinue netwerken. De laatste 20 jaar komt steeds meer aandacht voor het bestuderen van de tijdsdiskrete variant, waarbij dankbaar gebruik gemaakt wordt van de reeds aanwezige kennis. Dit wil niet zeggen dat de synthese problemen van alle geschetste soorten netwerken zijn opgelost.

### Voorbeeld 1:

Voor de gearde, passieve, verliesvrije tweepoort, beschreven d.m.v. de Belevitch polynomen  $f$ ,  $g$ ,  $h$  (en  $\sigma$ ) bestaat een volledige synthese die uitmondt in een kaskadestructuur van reciproke en niet-reciproke secties bestaande uit alle soorten netwerkelementen.

### Voorbeeld 2:

Voor netwerken bestaande uit slechts 2 soorten elementen (b.v.  $L$  en  $C$ ) bestaat slechts een synthesesmethode als de beschrijvende polynomen in  $s$  niet hoger zijn dan de  $6^e$  graad. De netwerken (gearde tweepoorten) zijn van het serie-parallel type.

### Voorbeeld 3:

De beroemde ladderstructuur voor verliesvrije, gearde tweepoortnetwerken is niet altijd mogelijk, d.w.z.: Niet alle stelsels polynomen die een gearde, verliesvrije, tweepoort beschrijven, kunnen in een laddernetwerk bestaande uit  $L$ 's en  $C$ 's met positieve elementwaarden worden gerealiseerd.

Een extra vrijheidsgraad (of -graden) is vaak aanwezig bij synthese doordat er vaak sprake is van slechts gedeeltelijke netwerkspecificatie:

### Voorbeeld 1:

Voor een tweepoort is b.v. alleen  $Z_{21}$  gespecificeerd. Dan kan worden geprobeerd de specificatie zodanig volledig te maken dat een gewenste realisatievorm mogelijk wordt.

### Voorbeeld 2:

Bij een beschrijving d.m.v. Belevitch polynomen, kunnen b.v. slechts de polynomen  $h$  en  $f$  gegeven zijn.

### Voorbeeld 3:

De methode om een tijdsdiskrete overdrachtsfunctie  $H(z)$  te 'embedden' in een orthogonaal tijdsdiskreet netwerk kan worden gezien als een methode om een partiele specificatie volledig te maken.

## 3.2 Synthese van verliesvrije eenpoort immitanties

### 3.2.1 Synthese volgens Foster

Foster maakt gebruik van de partiele breuk ontwikkeling (zie figuren 3.1 en 3.2):

$$Z(s) = \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_i^2} + k_\infty \cdot s$$

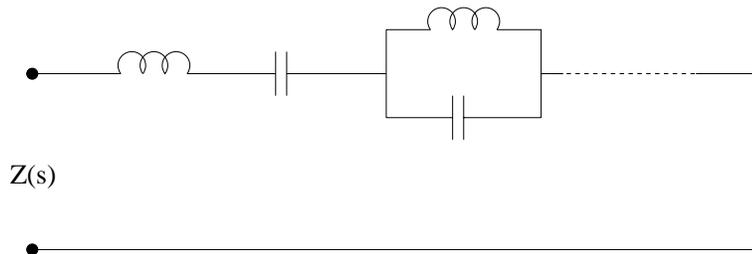


Figure 3.1: eerste ontwikkeling volgens Foster

of:

$$Y(s) = \frac{k'_0}{s} + \sum_i \frac{2k'_i s}{s^2 + \omega_i'^2} + k'_\infty s$$

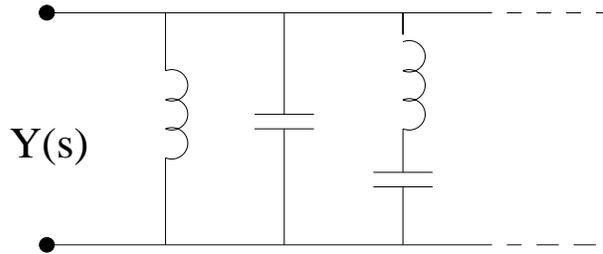


Figure 3.2: tweede ontwikkeling volgens Foster

Het nodige aantal elementen is minimaal.

### 3.2.2 Synthese volgens Cauer

Stelling:

Bij een hurwitzpolynoom in engere zin behoort een kettingbreuk ontwikkeling die niet voortijdig afbreekt en waarin alle coëfficiënten positief zijn.

$$\frac{P_e}{P_o} \text{ (of } \frac{P_o}{P_e}) = b_n s + \frac{1}{b_{n-1} s + \frac{1}{b_{n-2} + \frac{1}{b_{n-3} s + \dots}}}$$

$$\text{of} = \frac{c_n}{s} + \frac{1}{\frac{c_{n-1}}{s} + \frac{1}{\frac{c_{n-2}}{s} + \frac{1}{\frac{c_{n-3}}{s} + \dots}}}$$

**Eerste realisatie volgens Cauer: figuur 3.3**

$$Z(s) = L_n s + \frac{1}{C_{n-1} s + \frac{1}{L_{n-2} s + \dots}}$$

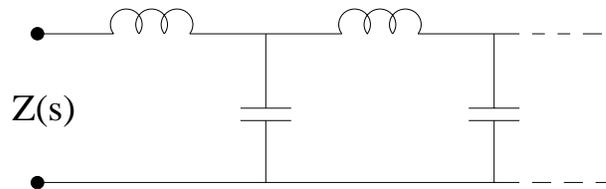


Figure 3.3: eerste ontwikkeling volgens Cauer

**Tweede realisatie volgens Cauer: figuur 3.4**

$$Z(s) = \frac{1}{C_n s} + \frac{1}{L_{n-1} s + \frac{1}{C_{n-2} s + \dots}}$$

**3.2.3 Mengvormen**

Mengvormen (volgens Foster én Cauer) zijn ook mogelijk:(zie figuur 3.5)  
 Welke realisatie ook gekozen wordt, bij elke afsplitsing van element(en) wordt de graad van het restant lager.

**3.3 Passieve eenpoort-immitanties**

We denken aan éénpoorten opgebouwd uit een eindig aantal passieve, lineaire geconcentreerde elementen met positieve waarden.

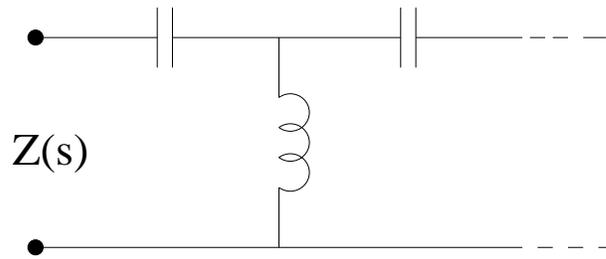


Figure 3.4: tweede ontwikkeling volgens Cauer

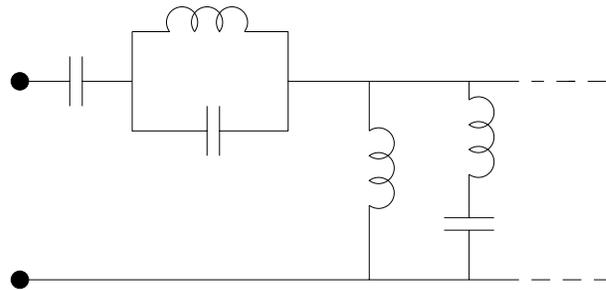


Figure 3.5: gemengde realisatie

Dan is:

$$F(s) (= Z(s) \text{ of } Y(s)) = \frac{T(s)}{N(s)}$$

Voor een dergelijke éénpoort immittantiefunctie kunnen we op fysische gronden twee voorwaarden formuleren (deze zijn noodzakelijk én voldoende, dit wordt hier niet bewezen):

1. De stabiliteitsvoorwaarde.

Het netwerk moet stabiel zijn, d.w.z. vrije trillingen in het netwerk mogen niet onbegrensd in de tijd toenemen. Dit geldt ook voor open- en kortgesloten poort. Ligt een pol of nulpunt op de imaginaire as dan is deze slechts van de eerste orde.

Anders gezegd:  $T(s)$  en  $H(s)$  zijn hurwitzpolynomen.

2. De passiviteitsvoorwaarde.

Het gemiddeld vermogen dat door een bron aan een passief netwerk wordt geleverd moet groter óf gelijk aan nul zijn, omdat de geleverde energie

wordt gedissipeerd (in weerstanden) of opgeslagen (in zelfindukties en capaciteiten).

Gebruik makend van het Theorema van Tellegen volgt hieruit uiteindelijk:

$$\operatorname{Re}(F) \geq 0, \text{ voor } \operatorname{Re}(s) \geq 0.$$

Dit geldt dus voor zowel  $Z(s)$  als  $Y(s)$ .

Deze  $Z(s)$  en  $Y(s)$  moeten z.g. positieve reële functies zijn (afkomstig van Brune, 1931).

Een synthese methode om te komen tot een netwerk wordt hier niet gegeven.

### 3.4 Eenvoudige tijdscontinue laddersynthese.

In hoofdstuk 2 hebben we verliesvrije netwerken (afgesloten in weerstanden) en hun beschrijving leren kennen. De begrippen reflectie en transmissie zijn ingevoerd. Uiteindelijk leidde dit tot de verstrooiingsmatrix  $S$ .

In deel 1 van dit diktaat zijn verschillende standaard benaderingsmethoden van de ideale laagdoorlaat ingevoerd. Het blijkt dat deze meestal gerealiseerd kunnen worden d.m.v. verliesvrije ladderstructuren met positieve elementwaarden.

De ladderstructuur voor Butterworth en Chebyshev karakteristiek blijkt kanoniek in het aantal verliesvrije elementen. Bovendien levert elk element een bijdrage aan het ontstaan van de overdrachtsnulpunten voor  $\omega \rightarrow \infty$ .

Onder deze voorwaarden blijkt dat het netwerk gevonden kan worden d.m.v. systematische afsplitsing van de ingangsimpedantie  $Z$ .

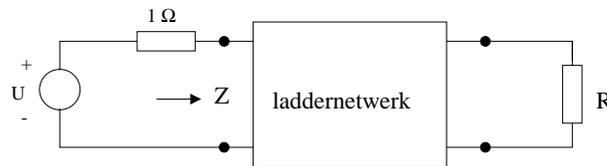


Figure 3.6:

We zullen dit niet bewijzen, maar demonstreren aan de hand van voorbeelden.

#### Voorbeeld 1

We nemen voorbeeld 1 van hoofdstuk 2.6.

Daar vinden we:

$$S_{11}(s) = \rho(s) = \frac{s}{s+1}$$

Hieruit volgt:

$$Z = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = 2s + 1$$

Hieruit volgt het netwerk voor  $Z$  van figuur 3.7.

#### Voorbeeld 2

We nemen voorbeeld 2 van hoofdstuk 2.6.

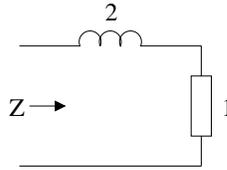


Figure 3.7:

Daar:

$$S_{11}(s) = \frac{\pm s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}, \quad \text{kiezen we eerst:} \quad S_{11} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Dan volgt:

$$Y = \frac{\sqrt{2}s + 1}{2s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Rightarrow Z = \frac{2s^2 + \sqrt{2}s + 1}{\sqrt{2}s + 1} = \sqrt{2}s + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

Dus het netwerk wordt figuur 3.8.

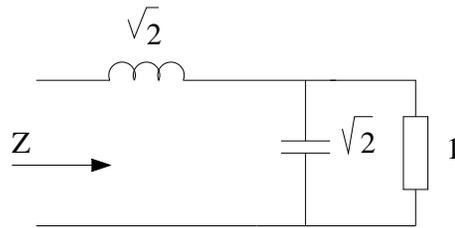


Figure 3.8:

Kiezen we vervolgens:

$$s_{11} = \frac{-s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Dan wordt:

$$Y = \frac{2s^2 + \sqrt{2}s + 1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}s + 1}$$

Dus:

Op deze wijze kunnen we alle Butterworth en Chebyshev laddernetwerken vinden.

Op vergelijkbare wijze worden ook de laddernetwerken bepaald voor de rationale funktie benaderingen. Omdat hier overdrachtnulpunten bestaan bij

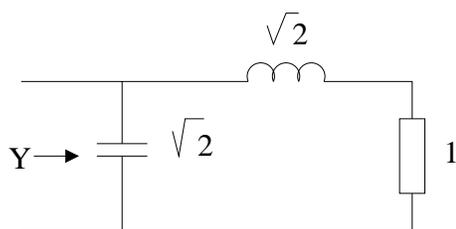


Figure 3.9:

eindige  $\omega$  moeten hiervoor tweede orde impedantie afsplitsingen (resonantiekringen) gedaan worden. We zullen dit hier laten rusten.

Nog een belangrijke eigenschap van de laddernetwerken die de Butterworth, Chebyshev en rationale functie benadering realiseren dient hier te worden vermeld.

Deze eigenschap volgt uit de bestudering van de  $S$ -matrix polynomen  $f$ ,  $g$  en  $h$  van deze netwerken en de gevolgen die dit heeft voor de Tellegen-polynomen van die netwerken. (De laddernetwerken zijn allemaal reciprook, dus voor het Tellegen-polynoom  $K$  geldt altijd:  $K \equiv 0$ ).

Voor oneven orde geldt:

polynoom  $g$ : oneven orde, Hurwitz polynoom in engere zin,

polynoom  $h$ : oneven polynoom, alle reflectie nulpunten liggen op de imaginaire as,

polynoom  $f$ : even polynoom.

Uit het oneven zijn van  $h$  volgt voor de Tellegen-polynomen:  $A=B$ . Hieruit volgt dat de oneven orde laddernetwerken een symmetrische  $Z$ - en  $Y$ -matrix hebben.

Voor de Butterworth en Chebyshev laddernetwerken van oneven orde betekent dit dat de netwerken zelf ook symmetrisch zijn.

Voor even orde geldt:

polynoom  $g$ : even orde, Hurwitz polynoom in engere zin,

polynoom  $h$ : even polynoom, alle reflectienulpunten liggen op de imaginaire as, maar niet in de oorsprong.

polynoom  $f$ : even polynoom.

Uit het even zijn van  $h$  volgt voor de Tellegen-polynomen:  $C=D$ . De gevolgen hiervan voor de  $Z$ -  $Y$ - en  $K$ -matrix zijn duidelijk. Deze netwerken worden

door deze eigenschap antimetrisch genoemd.

## Chapter 4

# Twee extra verliesvrije filterrealisatievormen

### 4.1 Het microgolf ladderfilter met eenheidselementen

De componenten die in deze microgolfilters worden gebruikt zijn stukken ideale transmissielijn van allemaal dezelfde lengte en verschillende karakteristieke weerstanden.

Figuur 4.1 toont zo'n stuk ideale, verliesvrije transmissielijn met lengte  $l$  (el) en karakteristieke weerstand  $R$ .

Afgeleid kan worden dat de kettingmatrix  $K$  van dit stuk transmissielijn er als volgt uit ziet:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

met:

$$K = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) & j \cdot R \sin\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) \\ j \cdot \frac{1}{R} \sin\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) & \cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Hierin is:

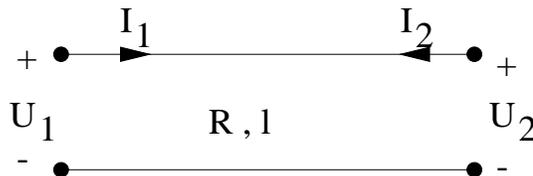


Figure 4.1: een stuk ideale transmissielijn met lengte  $l$

$$\lambda = \frac{v_t}{f} \quad (4.2)$$

waarin  $v_t$  de propagatiesnelheid en  $\lambda$  de golflengte is in de transmissielijn, met de frekwentie  $f$ .

In de bedoelde microgolffilters worden de stukken transmissielijn gekozen met dezelfde lengte  $l$ , met:

$$l = \frac{\lambda_r}{4} \quad (4.3)$$

Hierin is  $\lambda_r$  de golflengte die correspondeert met een bepaalde frekwentie  $f_r$ . Voor een laagdoorlaat type is  $f_r$  dan meestal de afsnijfrekwentie ( de overgang van doorlaat naar sper). Voor een banddoorlatend type is  $f_r$  meestal het midden van de doorlaatband.

Uit het voorgaande volgt dan:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\frac{\pi f}{2f_r})}} \begin{bmatrix} 1 & j.R. \tan(\frac{\pi f}{2f_r}) \\ j.\frac{1}{R} \cdot \tan(\frac{\pi f}{2f_r}) & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

De periodiciteit hierin vermijden we met een afbeelding naar de complexe frekwentie  $w$ :

$$w = \tan\left(\frac{s}{4f_r}\right). \quad (4.5)$$

In (4.5) is  $w = u + jv$  en  $s = a + j\omega$ . ( $w$  en  $s$  zijn beide complexe frekwenties). Voor  $a = 0$  krijgen we:

$$v = \tan\left(\frac{\pi \cdot f}{2f_r}\right) \quad (4.6)$$

Na invulling van  $v = \frac{w}{j}$  krijgen we:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} \begin{bmatrix} 1 & wR \\ \frac{w}{R} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Dit is dus de  $K$ -matrix van een  $w$ -vlak tweepoortelement: het eenheidselement. Het te gebruiken symbool hiervoor is gegeven in figuur 4.2.

Behalve de  $w$ -vlak capaciteit en-zelfinductie hebben we nu een extra element: het eenheidselement, beschikbaar voor filtersynthese.

Sluiten we poort 2 van een eenheidselement ( $R$ ) kort, dan volgt aan de ingangspoort 1:

$$Z_1 = R.w, \quad \text{of :} \quad (4.8)$$

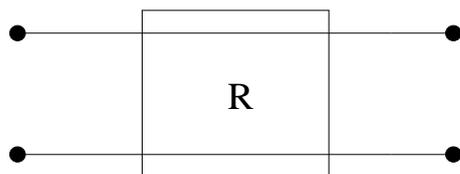


Figure 4.2: symbool voor het eenheidselement

|| Als we poort 2 van een eenheidselement (R) kortsluiten  
 || dan zien we aan poort 1 een  $w$ -vlak zelfinductie met  
 || waarde  $R$ .

Laten we poort 2 van een eenheidselement (R) open dan volgt aan de ingangspoort 1:

$$Z_2 = \frac{R}{w}, \quad \text{of :} \quad (4.9)$$

|| Als we poort 2 van een eenheidselement (R) open laten  
 || dan zien we aan poort 1 een  $w$ -vlak capaciteit met  
 || waarde  $\frac{1}{R}$ .

Op de algemene filtersynthese waarin behalve  $L$  en  $C$  ook het eenheidselement (een tweepoort) wordt gebruikt, gaan we hier niet in. De complicerende faktor is hier o.a. de faktor  $\sqrt{1-w^2}$  in  $K$ .

#### 4.1.1 Enkele $w$ vlak (Kuroda) identiteiten

In de figuren 4.3 en 4.4 volgt een  $w$ -vlak tweepoort identiteit die verderop nuttig blijkt bij het vinden van equivalente netwerken.

of andersom:

Gebruikmakend van deze identiteiten en (4.3) en (4.4) kunnen we de volgende mogelijke vertalingen van  $w$ -vlak resonantiekeringen afleiden:

De seriekring: zie figuur 4.5

De parallelkring: zie figuur 4.6

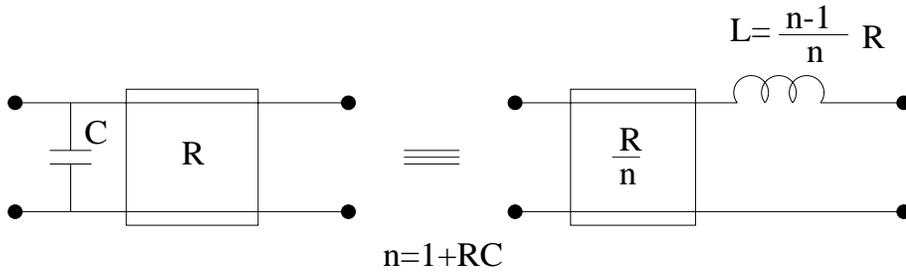


Figure 4.3: tweepoort-identiteit

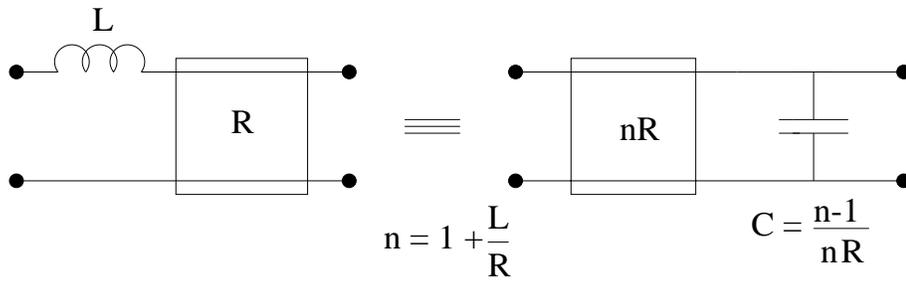


Figure 4.4: dezelfde identiteit als die uit figuur 4.3

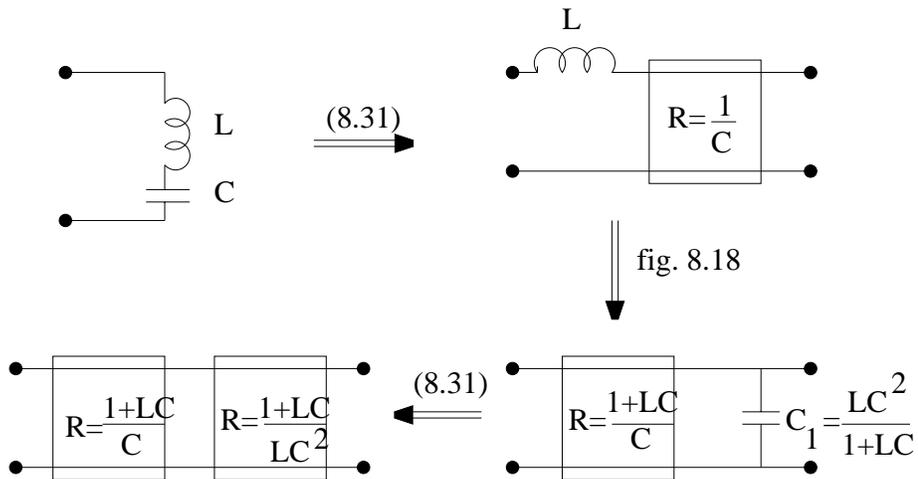


Figure 4.5: vertaling van de seriekring

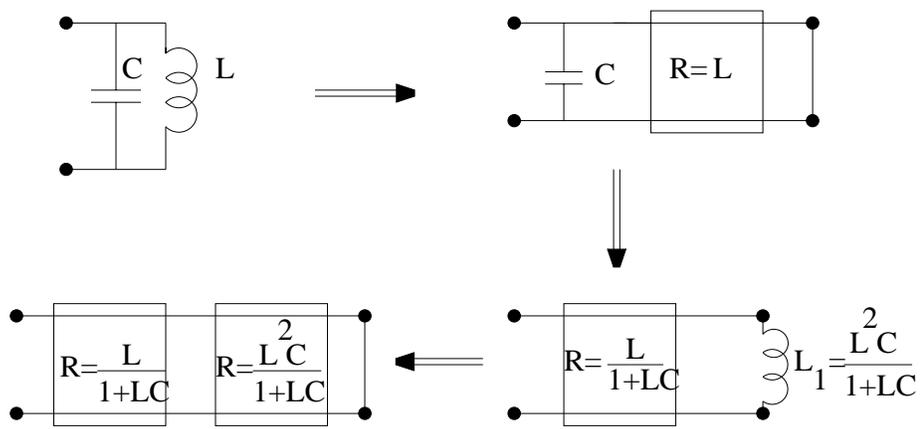


Figure 4.6: vertaling van de parallelkring

### 4.1.2 Enkele voorbeelden

**Voorbeeld 1:**

Een bron ( $1 \Omega$ ) en een belasting ( $1\Omega$ ) met daartussen een eenheids element met  $R = 1\Omega$ .

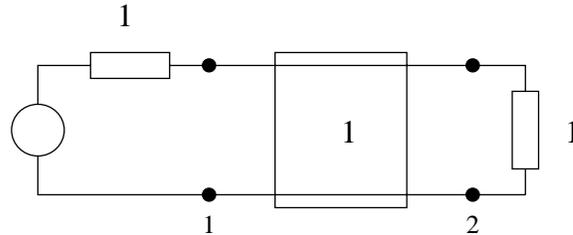


Figure 4.7:

We geven eerst enkele belangrijke tweepoort matrices met betrekking tot het eenheidselement.

source

$$Z = \frac{R}{w} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{1-w^2} \\ \sqrt{1-w^2} & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \frac{1}{Rw} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{1-w^2} \\ -\sqrt{1-w^2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{1 + \frac{R^2+1}{2R}w} \begin{bmatrix} \frac{R^2-1}{2R}w & \sqrt{1-w^2} \\ \sqrt{1-w^2} & \frac{R^2-1}{2R}w \end{bmatrix}$$

(Vraag: hoe zou u deze Z, Y en S berekenen uit de gegeven K, formule 4.7?)

Vullen we nu  $R = 1$  in in de formule voor S dan volgt:

$$S = \frac{1}{1+w} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-w^2} \\ \sqrt{1-w^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \begin{bmatrix} 1-w & 0 \\ 0 & 1+w \end{bmatrix}$$

Enkele conclusies hieruit:

- $S_{11} = S_{22} = 0$ , dus: voor elke  $w$  is er geen reflectie, voor alle  $w$  is het eenheidselement met  $R = 1$  dus aangepast.
- 

$$|S_{21}|^2 = |S_{12}|^2 = \frac{1 - w^2}{(1 + w)(1 - w)} = 1$$

De vermogensoverdracht van poort 1 naar poort 2 is dus maximaal (ook voor poort 2 naar poort 1 dus) voor alle  $w$ .

Voor  $R = 1$  is het eenheidselement dus een all-pass.

**Voorbeeld 2:**

Een tweede orde laddernetwerk met Butterworth of Chebyshev karakteristiek, aangevuld aan poort 1 met een eenheidselement met  $R = 1$ .

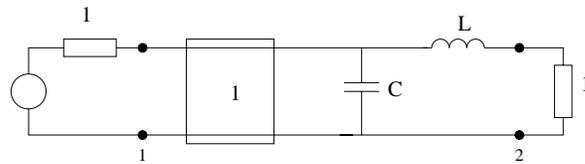


Figure 4.8:

- Uit voorbeeld 1 volgt nu dat in bovenstaand netwerk de amplitude karakteristiek niet wordt beïnvloed door dit eenheidselement.
- Gebruik van een Kuroda identiteit levert het volgende netwerk op:

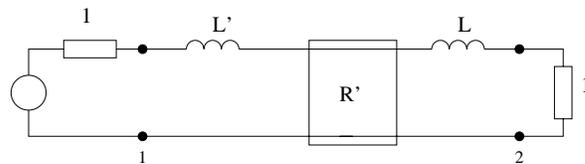


Figure 4.9:

Bereken zelf voor een tweede orde voorbeeld de waarden van deze elementen.

- Als we in plaats van bij poort 1, nu bij poort 2 van het tweede orde filternetwerk een eenheidselement  $R = 1$  toevoegen, dan volgt na gebruik van een Kuroda identiteit onderstaand netwerk:

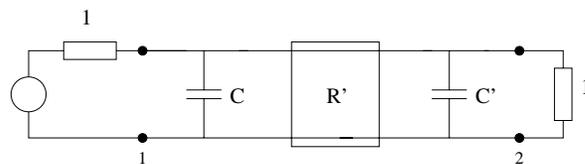


Figure 4.10:

In plaats van 2 serie zelfindukties hebben we nu 2 parallel capaciteiten gekregen.

In de microgolfttechniek heeft het laatste netwerk de voorkeur omdat het veel nauwkeuriger te maken is dan het eerste.

- Het totale netwerk heeft nog een tweede orde amplitude karakteristiek maar het netwerk is nu van de derde orde.
- Gegeven de S-matrix van het tweede orde netwerk, bepaal de S-matrix van het totale netwerk (beide gevallen). (via vermenigvuldiging van 2 T-matrices) Hieruit moet volgen dat  $|S_{21}|^2$  niet is veranderd.

**Voorbeeld 3:**

Een derde orde Butterworth of Chebyshev laagdoorlaat laddernetwerk heeft de beide onderstaande mogelijkheden:

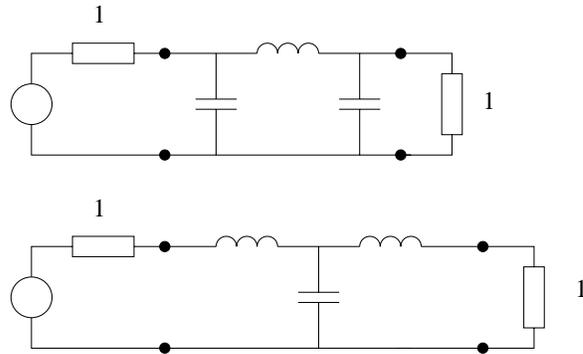


Figure 4.11:

- Beide netwerken zijn structureel en elektrisch symmetrisch. Dit blijft zo als we aan de poort 1 en 2 elk een eenheidselement met  $R = 1$  tussenschakelen.
- Na twee keer een Kuroda identiteit wordt netwerk 2 dan als volgt:

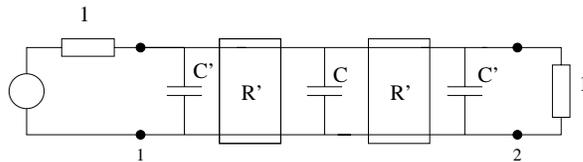


Figure 4.12:

- Bereken zelf een numeriek voorbeeld. Hieruit zal de symmetrie moeten blijken.
- Het netwerk heeft een derde orde amplitude karakteristiek, maar is zelf van de vijfde orde.

## 4.2 De Jauman structuur

We hebben gezien dat verliesvrije laddernetwerken, afgesloten in weerstanden, belangrijk zijn als filterrealisatievorm en ook hebben we aan de hand van enkelen voorbeelden laten zien hoe we de netwerken vinden.

Behalve het laddernetwerk is er nog een andere structuur van belang: het Jauman netwerk.

Dit is een kanonieke realisatievorm voor verliesvrije, reciproke, symmetrische tweepoort netwerken.

Uit deze beperkingen volgt voor de Tellegen-polynomen:

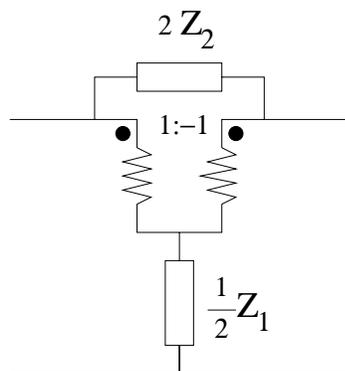
$$\text{Reciprook: } H+K=H-K \quad \rightarrow \quad K \equiv 0.$$

$$\text{Symmetrisch: } Z_{11} = Z_{22} \quad \rightarrow \quad A \equiv B.$$

Dan wordt:

$$S = \frac{1}{2A+C+D} \begin{bmatrix} D-C & 2H \\ 2H & D-C \end{bmatrix}$$

Het Jauman netwerk is getekend in figuur 4.7. Hierin zijn  $2Z_2$  en  $\frac{1}{2}Z_1$  verliesvrije impedanties.



$$Z_1 = Z_{11} + Z_{12} = \frac{A+H}{C}$$

$$Z_2 = Z_{11} - Z_{12} = \frac{A-H}{C}$$

Figure 4.13: Jauman netwerk

## Chapter 5

# Een uitgewerkt rekenvoorbeeld

Voorbeeld van berekening van de S-matrix van  
een Chebyshev filter en berekening van het laddernetwerk

keus: diktaat deel 1, pag 120, T 03, 25 %.

Gegeven is daar:

$$H(s) = \frac{1}{C(s + a_0)(s^2 + 2a_1s + a_1^2 + b_1^2)}$$

met:  $a_0 = 0.74334$ ,  $a_1 = 0.37167$ ,  $b_1 = 1.07908$ ,

$C = 1.0327956$ .

Dempingsnulpunt bij  $\omega = 0.866025$ .

Dus:

$$S_{21} = H(s) = \frac{f}{g} = \frac{0.9682}{(s + 0.74334)(s^2 + 0.7433s + 1.3026)}$$

Het polynoom h heeft de vorm:  $s(s^2 + 0.866025^2)$ .

Uit  $g \cdot g_* = h \cdot h_* + f \cdot f_*$  mogen we besluiten:

$$h = \pm s(s^2 + 0.750)$$

Het netwerk zal reciprook zijn dus:  $f = \sigma f_*$ , dus  $\sigma = 1$ .

$$S = \frac{1}{(s + 0.74334)(s^2 + 0.7433s + 1.3026)} \begin{bmatrix} \pm s(s^2 + 0.75) & 0.9682 \\ 0.9682 & \pm s(s^2 + 0.75) \end{bmatrix}$$

Het netwerk kan berekend worden uit de ingangsimpedantie  $Z_{in}$ , met:

$$\rho_1 = S_{11} = \frac{Z_{in} - 1}{Z_{in} + 1} = \frac{h}{g}$$

Hieruit volgt:

$$Z_{in} = \frac{g + h}{g - h}$$

met:

$$g = s^3 + 1.4867s^2 + 1.8551s + 0.9682,$$

$$h = s^3 + 0.75s \text{ (het + teken is gekozen).}$$

dan:

$$Z = \frac{2s^3 + 1.4867s^2 + 2.6051s + 0.9682}{1.4867s^2 + 1.1051s + 0.9682} = 1.3453s + \frac{1.3026s + 0.9682}{1.4867s^2 + 1.1051s + 0.9682}$$

Hier kan dus een zelfinductie 1.3453 s worden afgesplitst.

$$Y_{rest} = \frac{1.4867s^2 + 1.1051s + 0.9682}{1.3026s + 0.9682} = 1.1413s + \frac{0.9682}{1.3026s + 0.9682}$$

Hier kan dus een capaciteit 1.1413 s worden afgesplitst.

$$Z_{rest} = \frac{1.3026s + 0.9682}{0.9682} = 1.3453s + 1.$$

Dit is dus een zelfinductie en een weerstand in serie.  
 polynoom h met het - teken gekozen zou zijn.  
 Het resultaat is symmetrisch, zoals verwacht.

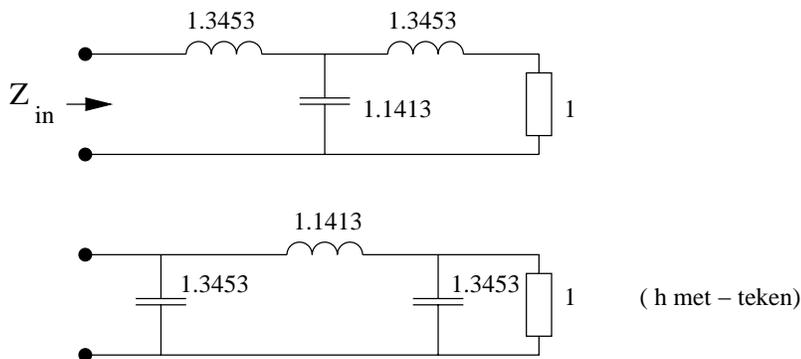


Figure 5.1:

Nu volgt nog de berekening van de betrokken Tellegen polynomen + Yauman netwerk, uit de S-matrix gegevens.

We hebben:  $f = 2H = 0.9682$ , dus  $H = 0.4841$ .

We hebben (even deel van g)  $A+B = 2A = 1.4867s^2 + 0.9682$ ,  
 dus  $A = 0.7434s^2 + 0.4841$ .

Ook volgt uit:

$$D - C = s^3 + 0.75 \text{ s ( = h)}$$

$$D + C = s^3 + 1.8551 \text{ s ( oneven deel van g)}$$

$$D = s^3 + 1.3025 \text{ s en } C = 0.5526 \text{ s.}$$

De Yauman netwerkcomponenten:

$$Z_1 = \frac{A + H}{C} = \frac{0.7434s^2 + 0.9682}{0.5526s} = 1.3453s + \frac{1}{0.5707s}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{1}{2}Z_1 = 0.6727s + \frac{1}{1.1415s}$$

$$Z_2 = \frac{A - H}{C} = \frac{0.7434s^2}{0.5526s} = 1.3453s$$

Dus:  $2Z_2 = 2.6906 \text{ s.}$

Het Yauman netwerk wordt:

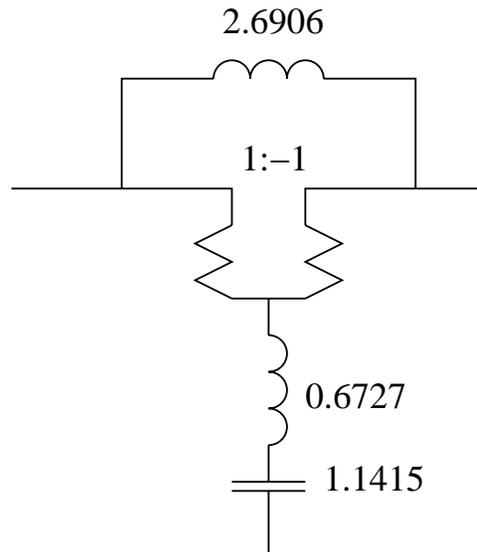


Figure 5.2:

## Chapter 6

# Introductie in de microgolftechniek