

# Contents

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Benaderingstheorie van filterfuncties: een introductie</b>	<b>7</b>
2.1	Het begrip demping . . . . .	8
2.2	De Butterworth benadering . . . . .	10
2.3	De Chebyshev benadering . . . . .	13
2.4	De Inverse Chebyshev benadering . . . . .	18
2.5	De Chebyshev rationale functie benadering . . . . .	20
2.6	Introductie in de elliptische functies voor een beter begrip van de Cauer benaderingsmethode . . . . .	24
2.7	De Bessel-Thomson benadering voor lineair fase verloop . . . . .	32
2.8	Combinatie van de benaderingsmethoden . . . . .	37
2.9	Enkele frekwentie-transformaties. . . . .	38
2.9.1	De standaard transformaties . . . . .	38
2.9.2	De Skwirzynski transformatie. . . . .	39
2.10	Enkele vragen + uitwerking . . . . .	45
2.11	Een paar filtervoorbeelden . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Aktieve filters en filters met schakelende capaciteiten</b>	<b>60</b>
3.1	De operationele versterker(op-amp) . . . . .	60
3.2	Switched-capacitor principe . . . . .	63
3.3	Eerste orde secties. . . . .	68
3.4	Tweede orde secties . . . . .	72
3.5	Switched-capacitor secties . . . . .	86
3.6	Aktieve filters van willekeurige orde . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Verliesvrije ladderstructuren</b>	<b>92</b>
4.1	Mogelijke ladderrealisaties . . . . .	92
4.2	Vermogensoverdracht en laddernetwerken . . . . .	94
4.3	Opmerkingen . . . . .	101

<b>5</b>	<b>Simulatie van ladderfilterstructuren met actieve componenten</b>	<b>105</b>
5.1	De generalised impedance converter GIC . . . . .	106
5.2	Simulatie van een geaarde zelfinductie . . . . .	108
5.3	Simulatie van een niet-geaarde zelfinductie . . . . .	110
5.4	Funktionele simulatie van laddernetwerken . . . . .	112
5.5	Vervanging van zelfindukties door gyrator-C combinaties . . . .	116
<b>6</b>	<b>Filtertabellen en grafieken</b>	<b>118</b>
6.1	Handbook of filter synthesis, A. I. Zverev . . . . .	119
6.2	Filter design tables and graphs, Christian - Eisenmann . . . . .	139
6.3	Elementwaarden van Butterworth en Chebyshev ladders. . . . .	166
	6.3.1 Butterworth: . . . . .	166
	6.3.2 Chebyshev: . . . . .	168
<b>7</b>	<b>Tentamenopgaven</b>	<b>170</b>

# Chapter 1

## Inleiding

De geschiedenis van de filtertechniek is analoog begonnen: analoge signalen, bewerkt met behulp van analoge netwerken.

Deze geschiedenis heeft filtereigenschappen van analoge filters tevoorschijn gebracht, die we met veel nut kunnen gebruiken in het tijdsdiskrete geval (verliesvrijheid, digitale golffilters).

De ontwikkeling van de analoge filtertheorie heeft zich (als onderdeel van de netwerktheorie) in het begin geconcentreerd op de situatie geschetst in figuur 1.1.

Figuur 1.1 schetst een niet-ideale spanningsbron (een spanningsbron met inwendige weerstand als model voor de signaalbron, denk b.v. aan een kabel) via een netwerk aangesloten op een belasting, met als model een weerstand (denk b.v. aan de karakteristieke weerstand van een kabel).

Het filternetwerk wat we zullen gebruiken is een 'geaarde tweepoort'. Dit als een onderdeel van de netwerktheorie waar ook meer algemene 'n-poort netwerken' worden bestudeerd.

De filterwerking houdt in dat we de energieverdeling aanwezig in het frekwentie-

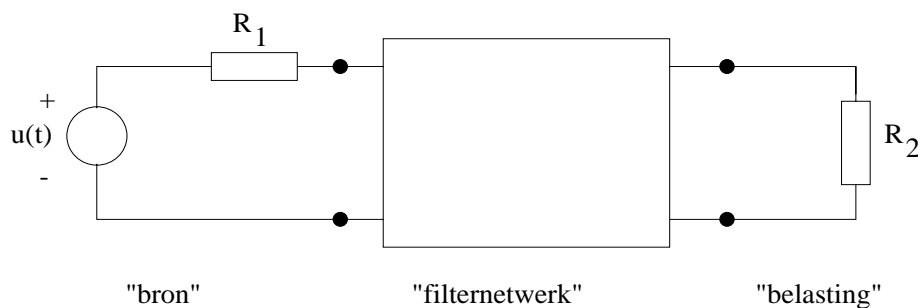


Figure 1.1: blokschema voor de filterwerking

spektrum van de signaalbron willen bewerken d.m.v. een lineair netwerk zodanig dat de energieverdeling die in de belasting terecht komt, een andere is. Bijvoorbeeld willen we bepaalde frekwenties aanwezig in de signaalbron, helemaal 'onderdrukken' (weghalen).

We zullen ons richten op de reeds bekende soorten filterkarakteristieken: laagdoorlaat, hoogdoorlaat, banddoorlaat, etc, zie hiervoor figuur 1.2.

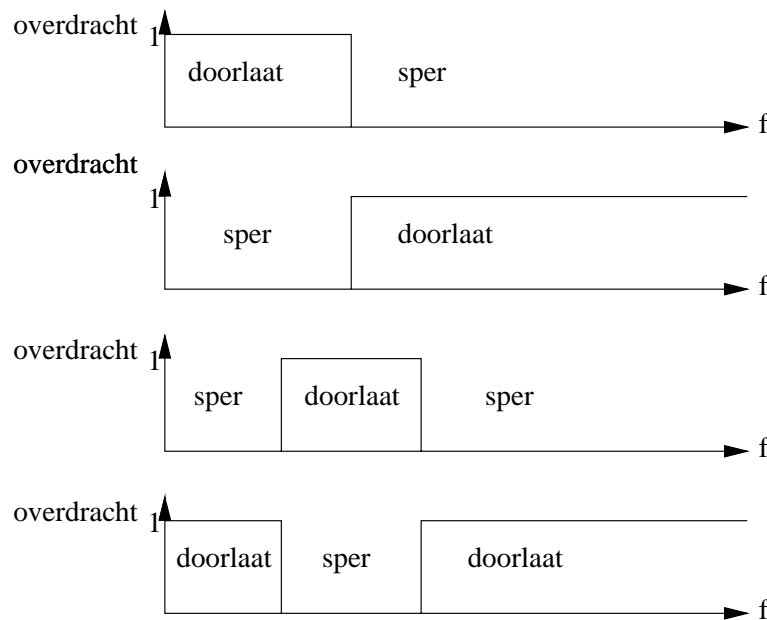


Figure 1.2: verschillende typen filters

De meest voor de hand liggende componenten om te gebruiken in het filter-netwerk zijn:

- weerstand
- zelfinductie
- capaciteit

Dat betekent dus: Passieve netwerken.

Het gebruik van de weerstand heeft als nadeel dat daarin vermogen verloren gaat. Vandaar de grote aandacht voor:

Passieve, verliesvrije netwerken,

als filternetwerk (zie hoofdstuk 4 van dit diktaat).

Verschillende belangrijke (netwerk) problemen stellen zich nu:

1. Welke filterfuncties zijn te realiseren d.m.v. netwerken met alleen zelfindukties en capaciteiten?
2. Hoe zien de rationale functies, die een netwerk bestaande uit weerstanden zelfindukties en capaciteiten beschrijven, eruit?
3. Als we de filterfuncties kennen, hoe vinden we netwerken die die functies realiseren?
4. Welke netwerken zijn de beste? Welke criteria?
5. etc.

Bovenstaande problemen zijn in de loop van de tijd aangepakt als algemene netwerksynthese en -analyse problemen. Vele netwerkproblemen worden (of werden) opgelost, vaak komen echter dan netwerken tevoorschijn die alle elementen vereisen (dus ook transformatoren en gyratoren). Vaak worden echter voor de filtertechniek goed bruikbare oplossingen gevonden.

In hoofdstuk 2 van dit diktaat bestuderen we de klassieke benaderingstheorie van filter karakteristieken: de bekende Butterworth-, Chebyshev- en Chebyshev rationale functie- ( ook wel Cauer- of Elliptische functie- ) benaderingen komen ter sprake.

In hoofdstuk 3 komen allerlei typen actieve realisaties van filter overdrachtsfuncties aan de orde. Deze realisaties gebruiken de weerstand, de capaciteit en de operationele versterker als componenten. Ook introduceren we hier de realisaties met schakelende capaciteiten (switch-capacitor filters).

In hoofdstuk 4 introduceren we de verliesvrije laddernetwerken (afgesloten in weerstanden) als filter realisatievorm.

In hoofdstuk 5 bespreken we allerlei realisatie vormen die in wezen simulaties zijn van de in hoofdstuk 4 behandelde laddernetwerken. We noen hier: realisaties met impedantie convertor (R-C-Aktief), de "Leap-frog realisatie, de Gyrator-C netwerken.

In hoofdstuk 6 geven we een aantal tabellen en grafieken waarmee het filter ontwerp in de praktijk wordt vereenvoudigd.

Terugkomend op de historische ontwikkeling in de filtertechniek:

Heel snel bleek de LC-ladder afgesloten in weerstanden de beste structuur te zijn. Het bleek mogelijk om met elementen tot ongeveer 0.1% nauwkeurig, filterkarakteristieken te maken met een orde hoger dan 30. Dit betekent dat selektiviteit gemaakt kan worden die met een lagere orde niet mogelijk is en toch met relatief onnauwkeurige elementwaarden.

Even enkele (triviale) opmerkingen:

1. Een LC-netwerk (+weerstanden) is nooit instabiel.
2. Dit netwerk heeft geen voedingsspanning nodig.

Toch, de ontwikkeling van filtertoepassingen bleek steeds kleinere afmetingen van de filters te vragen. De zelfinductie bleek het moeilijkst 'klein' te krijgen: dit element is vrijwel niet te integreren in chipvorm.

Het netwerkelement de gyrator verscheen. De combinatie gyrator + capaciteit levert een manier op een zelfinductie na te bootsen. De gyrator bleek d.m.v. electronica goed te realiseren. Dit leverde dus een elektronische realisatie van het netwerkelement de gyrator, met zijn beperkingen, b.v. een voedingsspanning die nodig is. Verliesvrije ladders werden nagebootst door gyrator-C filters.

Verdergaande eisen van verkleining leverde allerlei oplossingen: RC-actieve - en switched-capacitor filters. Volledige integratie en digitalisering leidt uiteindelijk tot digitale filters. Ook hier worden de beste filters gevonden als de LC-ladders worden nagebootst. In dit geval zijn het de optellers, vermenigvuldigers en delay-elementen die de basisbouwstenen vormen van de filterschakelingen en dus waard zijn nauwkeurig te worden bestudeerd.

## Chapter 2

# Benaderingstheorie van filterfuncties: een introductie

In dit hoofdstuk introduceren we methoden die bruikbare benaderingen opleveren van de ideale laagdoorlaatkarakteristiek.

We zijn dus op zoek naar functies  $H(s)$  zodanig dat geldt:

$$0 \leq \omega \leq 1 : \quad |H(s)|_{s=j\omega}^2 \approx 1$$

$$1 < \omega < \infty : \quad |H(s)|_{s=j\omega}^2 \approx 0$$

Vanwege een realisatievorm die we later zullen tegenkomen, willen we dat geldt:

$$0 \leq |H|_{s=j\omega}^2 \leq 1$$

De gezochte functies moeten stabiel en realiseerbaar zijn. Later willen we ze ook gebruiken voor de vermogensoverdrachtsfuncties in een verliesvrij netwerk (L en C met positieve waarden) afgesloten in weerstanden. We beperken ons tot amplitudekarakteristieken van het laagdoorlaat type.

Een veel gebruikte algemene schrijfwijze:

$$|H(s)|_{s=j\omega}^2 = \frac{1}{1 + \epsilon \cdot F(\omega^2)} \quad (2.1)$$

Hierin is  $\epsilon$  een nog te kiezen positieve kleine konstante en  $F(\omega^2)$  is een nog onbekende functie van  $\omega^2$  (F is even).

In de nulpunten van F geldt:  $|H| = 1$ , In de polen van F geldt:  $|H| = 0$ .

We zullen zien dat met de keus van de functie F de benadering van de ideale laagdoorlaat vrijwel geheel wordt vastgelegd. Vandaar dat de functie F in de filtertechniek de naam heeft gekregen van karakteristieke functie.

De nulpunten van  $F$  moeten dus vallen in de doorlaatband van de laagdoorlaat, de polen in de sperband van de laagdoorlaat.

De functie  $F$  is een even functie van  $\omega$  en via factorisatie zullen we uiteindelijk  $H(s)$  vinden met polen in het linkerhalfvlak. Dit wordt duidelijk aan de hand van voorbeelden.

Als geldt voor  $F$ :

1. Voor  $0 \leq \omega \leq 1$ :  $0 \leq F \leq 1$

dan volgt:

$$\frac{1}{1+\epsilon} \leq |H|^2 \leq 1 \quad (2.2)$$

Een benadering dus van de waarde '1' (tussen 0 en 1) die afhangt (bij gegeven  $F$ ) van de keus van  $\epsilon$  en beter wordt naarmate  $\epsilon$  kleiner is.

2. Voor  $1 < \omega < \infty$ : en  $1 < F < \infty$ ,

hebben we:

$$0 < |H|^2 = \frac{1}{1+\epsilon F} \quad (2.3)$$

Een benadering van de waarde '0' die beter is naarmate  $\epsilon F$  groter is.

We zullen nu enkele uit de literatuur bekende standaard benaderingen bespreken, maar eerst kort het begrip demping noemen.

## 2.1 Het begrip demping

Bij filters wordt vaak het begrip 'demping' gebruikt en uitgedrukt in 'decibel'. De definitie is:

$$A_{(in\ ab)} = -10 \log |H|^2$$

Als voorbeeld is in de figuur 2.1 overdracht en demping met elkaar gerelateerd. De eerste karakteristiek heet de amplitude karakteristiek, de tweede heet dempingskarakteristiek.

De waarde  $D$  is de maximale demping in de doorlaatband. Daarom in tabellen genoemd  $A_{max}$ .

De waarde  $C$  in de figuur is de minimale demping in de sperband. Daarom in tabellen genoemd  $A_{min}$ .



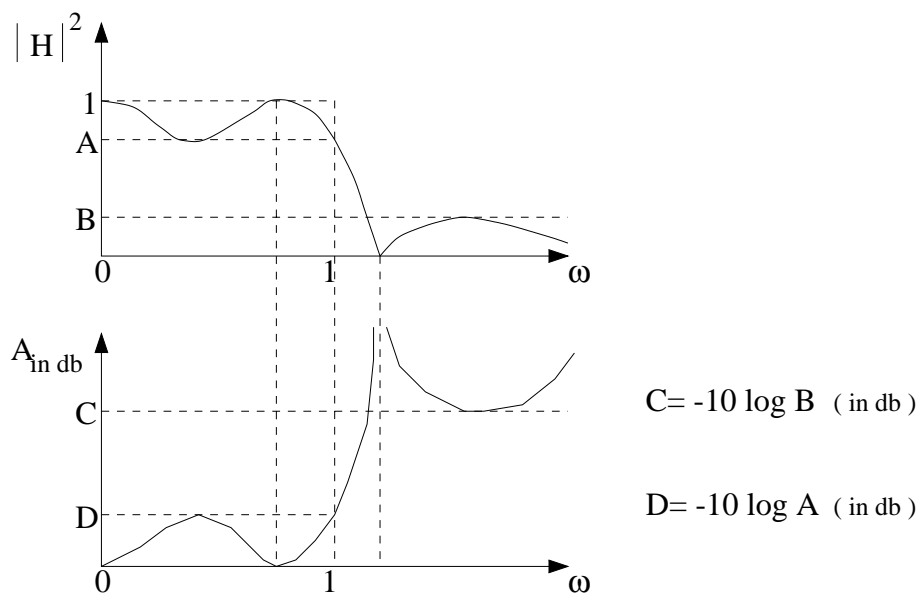


Figure 2.1: de relatie tussen overdracht en demping

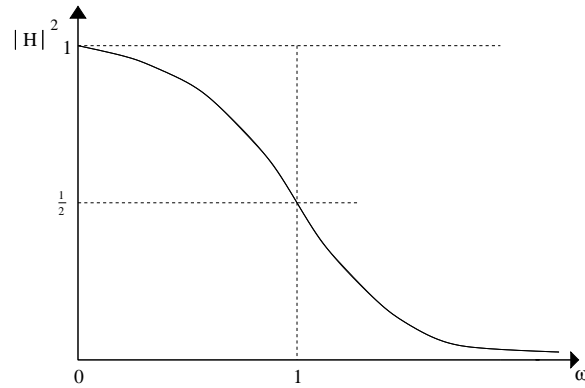


Figure 2.2: verloop voor  $n=1$

## 2.2 De Butterworth benadering

In dit geval kiezen we in formule 2.1:

$$\epsilon = 1 \quad \text{en} \quad F(\omega^2) = A_n = \omega^{2n} \quad (2.4)$$

dus:  $A_1 = \omega^2, A_2 = \omega^4, \text{ etc.}$

Uitwerking voor  $n = 1$ :

In dit geval geldt:

$$|H(s)|_{s=j\omega}^2 = \frac{1}{1+\omega^2} \quad \left( = \frac{1}{1+j\omega} \cdot \frac{1}{1-j\omega} \right) \quad (2.5)$$

$H(s)$  vinden we nu door te stellen:  $s^2 = -\omega^2$ ,  
dan volgt:

$$H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1-s^2} = \frac{1}{(1+s)(1-s)} \quad (2.6)$$

Hieruit nemen we voor  $H(s)$ :

$$H(s) = \frac{1}{1+s} \quad (2.7)$$

Het verloop van  $|H(s)|_{s=j\omega}$  volgt uit figuur 2.2.

Omdat  $A_1$  alle nulpunten heeft bij  $\omega = 0$ , wordt de benadering een maximaal vlakke benadering bij  $\omega = 0$  genoemd.

$A_1$  heeft alleen de waarde  $\rightarrow \infty$  voor  $\omega \rightarrow \infty$ , daarom wordt  $|H| \rightarrow 0$  alleen voor  $\omega \rightarrow \infty$ .

Voor n algemeen:

Voor n een positief geheel getal ontstaat dus een  $H(s)$  met een noemerpolynoom van de n-de graad.

Alle nulpunten van  $A_n$  liggen bij  $\omega = 0$  en alle polen bij  $\omega \rightarrow \infty$  en tussen  $\omega = 0$  en  $\omega \rightarrow \infty$  is  $A_n$  een monotoon stijgende functie:

dus de benadering van  $|H|$  is zodanig dat voor  $\omega = 0$  geldt:  $|H| = 1$  en voor  $\omega \rightarrow \infty$ :  $|H| = 0$ .

Daartussen:  $0 < |H| < 1$ .

De nulpunten van de noemer van:

$$H(s).H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{2n} (s - s_k)} \quad (2.8)$$

blijken alle op de eenheidscirkel te liggen. Voor  $H(s)$  kiezen we dus alle polen die liggen in het linkerhalfvlak.

We hebben:

$$s_k = \begin{cases} e^{j(2k-1)\pi/2n} & n = \text{even} \\ e^{j(k-1)\pi/n} & n = \text{oneven} \end{cases} \quad (2.9)$$

Twee voorbeelden:

n = 2:

$$s_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{4} + j \sin \frac{(2k-1)\pi}{4} \quad (2.10)$$

dus:

$$s_2, s_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{j}{\sqrt{2}}$$

dus een overdrachtsfunctie van de tweede orde met een Butterworth benadering:

$$H_2(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

**n = 3:**

$$s_k = \cos \frac{(k-1)\pi}{3} + j \sin \frac{(k-1)\pi}{3} \quad (2.11)$$

**dus:**

$$s_4 = -1, \quad s_3, s_5 = -0.5 \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H_3(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

## 2.3 De Chebyshev benadering

De algemene schrijfwijze die in dit geval meestal in de literatuur gebruikt wordt:

$$|H(s)|^2_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)} \quad (2.12)$$

Hierin is  $\epsilon$  opnieuw een nog te kiezen kleine positieve konstante en  $T_n(\omega)$  is het  $n$ -de graads Chebyshev polynoom.

Aangetoond kan worden dat we het polynoom  $T_n(\omega)$  als volgt kunnen schrijven:

$$T_n(\omega) = \cos(n \arccos \omega) \quad |\omega| \leq 1 \quad (2.13)$$

of:

$$\omega = \cos \theta \quad T_n(\omega) = \cos(n\theta) \quad |\omega| \leq 1 \quad (2.14)$$

Als we  $\cos n\theta$  uitdrukken in  $\cos \theta$  krijgen we de formules van  $T_n(\omega)$  als een polynoom in  $\omega$ .

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1(\omega) &= \omega \\ T_2(\omega) &= 2\omega^2 - 1 \\ T_3(\omega) &= 4\omega^3 - 3\omega \\ T_4(\omega) &= 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1 \\ T_5(\omega) &= 16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega \end{aligned} \quad (2.15)$$

Algemeen:

$$T_n(\omega) = 2\omega \cdot T_{n-1}(\omega) - T_{n-2}(\omega) \quad (2.16)$$

Over  $T_n(\omega)$  kan gezegd worden:

Tussen  $-1 \leq \omega \leq 1$  heeft  $T_n(\omega)$   $n$  nulpunten en varieert de waarde van  $T_n$  tussen  $+1$  en  $-1$ .

Voor  $\omega > 1$  is  $T_n(\omega)$  een monotoon stijgende functie.

In figuur 2.3 zijn  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  en  $T_4$  getekend.

Met deze polynomen bereiken we wat wordt genoemd een 'equiripple' benadering van '1' tussen  $\omega = 0$  en  $\omega = 1$ , zie figuur 2.5.

Met  $\epsilon$  is de grootte van de rimpel tussen  $\omega = 0$  en  $1$  instelbaar.

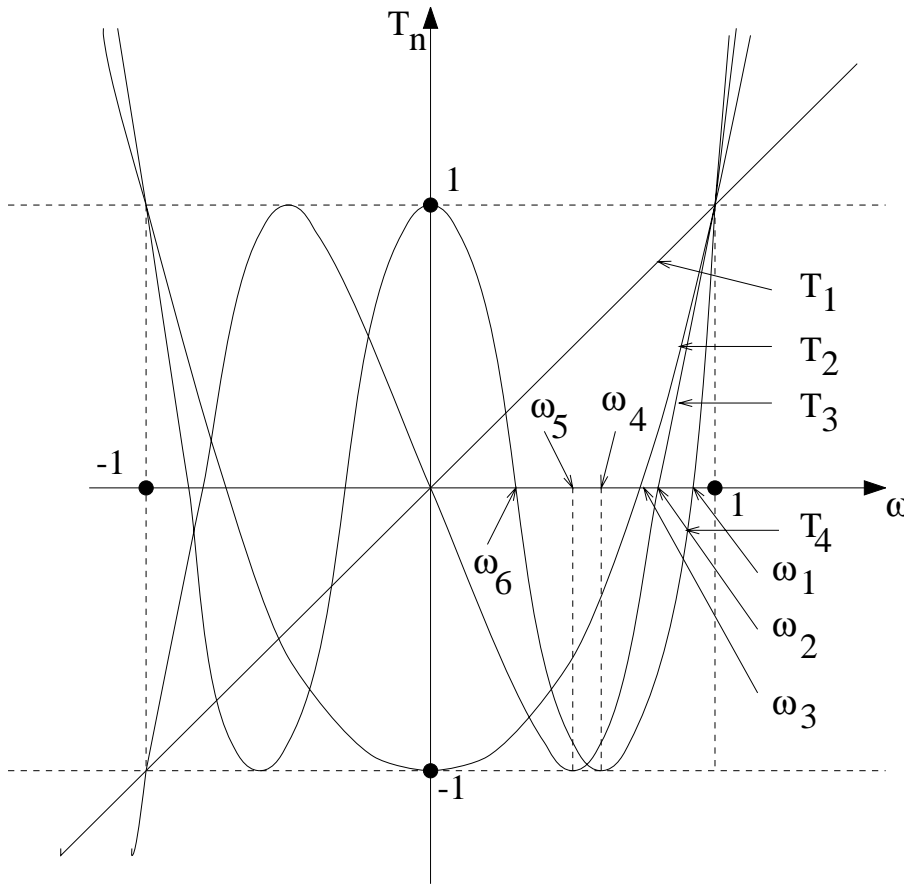


Figure 2.3: verloop van Chebyshev polynomen

Voor dezelfde orde  $n$  zal de Chebyshev benadering een betere en meer selectieve zijn als die van Butterworth (behalve bij  $n = 1$ , dan zijn ze gelijk).

Een voorbeeld voor  $n = 4$ :

We hebben:  $T_4(\omega) = \cos 4\theta$  met  $\omega = \cos \theta$ .

Drukken we  $\cos 4\theta$  uit in  $\cos \theta$  dan volgt:

$$T_4(\omega) = 1 - 8\omega^2 + 8\omega^4$$

(We gebruikten hiervoor:  $\cos 2nx = 2\cos^2 nx - 1$ )

Verder zien we uit figuur 2.4 dat we vrijwel meteen ook de nulpunten van  $T_4(\omega)$  berekend hebben:

$$\omega_1 = \cos \frac{3\pi}{8} \quad \omega_2 = \cos \frac{\pi}{8}$$

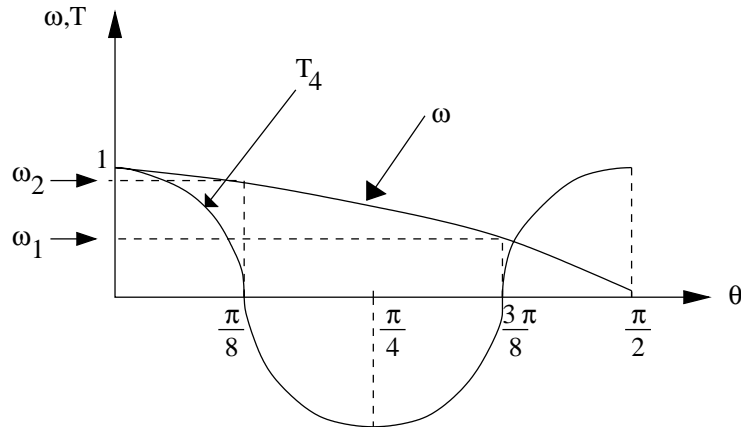


Figure 2.4: verloop van  $\omega$  en  $T_4$  als functie van  $\theta$

Voor  $|\omega| > 1$  wordt de grootheid  $\arccos(\omega)$  complex. Als we dan stellen:  $\arccos \omega = j \theta$  dan kunnen we afleiden dat algemeen te schrijven is:

$$T_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos(\omega)) & |\omega| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh}(\omega)) & |\omega| > 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

### Bepaling van de polen van $H(s)$ :

Als we schrijven voor de polen van  $H(-s^2)$ :

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k$$

dan kan worden afgeleid:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k &= \pm \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{arcsinh}\frac{1}{\epsilon}\right) \sin\frac{(2k-1)\pi}{2n} \\ \omega_k &= \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{arcsinh}\frac{1}{\epsilon}\right) \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, 2n \quad (2.18)$$

Bewezen kan worden dat de polen op een ellips liggen in het  $s$ -vlak. Zie ook figuur 2.6 voor  $n=3$ .

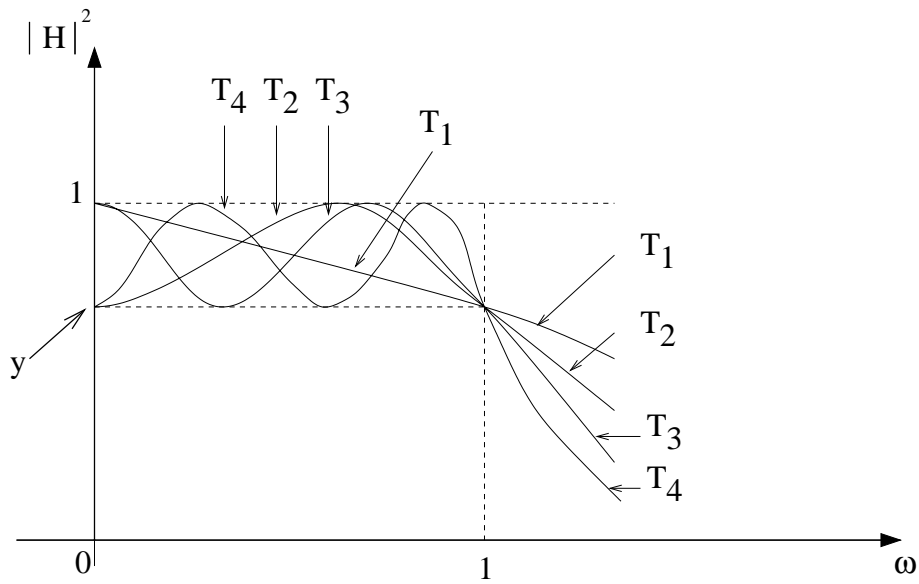


Figure 2.5: Chebyshev benaderingen in de doorlaatband

**Opmerking bij figuur 2.5:**

Bij  $n$ =even begint de functie  $|H|^2$  voor  $\omega = 0$  niet bij de waarde 1 want  $\omega = 0$  is dan geen nulpunt van  $T_n$ .

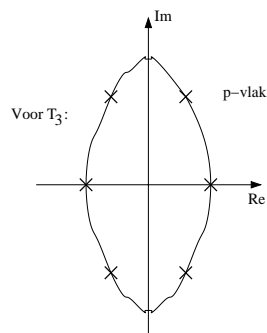


Figure 2.6: ligging van de polen voor  $n = 3$ .



Voorbeeld van de berekening van poolposities:

Stel  $n = 4$  en kies  $\frac{1}{\epsilon} = 1.965227$

( $\epsilon = 0.5088$  en  $\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{10^{0.1}-1}}$ )

Dan is  $\operatorname{arcsinh}\frac{1}{\epsilon} = 1.427975$ .

(We gebruiken:  $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ )

Dan wordt: (voor  $k=1, 2, \dots, 8$ )

$$\sigma_k = \pm 0.364625 \sin \frac{(2k-1)\pi}{8}$$

$$\omega_k = 1.064402 \cos \frac{(2k-1)\pi}{8}$$

Let op: bij de even orde Chebyshev benadering geldt:  $H(s)|_{s=0} \neq 1$ .

## 2.4 De Inverse Chebyshev benadering

Deze benaderingsmethode houdt direkt verband met de, al genoemde, normale Chebyshev polynoom benadering. In dit geval echter, heeft de laagdoorlaat benadering een equiripple gedrag in de sperband en is de benadering in de doorlaat maximaal vlak.

Voor de bepaling van de karakteristiek gaan we dan ook uit van de al behandelde Chebyshev polynoom benadering:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)}$$

We trekken dit af van de waarde 1 en vervangen  $\omega$  door  $1/\omega$ . Wat we krijgen is de Inverse Chebyshev benadering van figuur 2.7.

$$|H_{IC}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\epsilon^2 T_n^2(1/\omega)}} \quad (2.19)$$

Verder geldt:

$$A_{min} = 10 \log(1 + 1/\epsilon^2) \quad \text{db} \quad (2.20)$$

of:

$$\epsilon = (10^{A_{min}/10} - 1)^{-1/2} \quad (2.21)$$

Afgeleid kan worden dat we de frekwenties  $\omega_k$  in de sperband kunnen berekenen met:

$$\omega_k = \sec\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \quad (2.22)$$

De oneven waarden van  $k$  corresponderen met de dempingspolen, de even waarden van  $k$  corresponderen met de dempingsminima in de sperband.

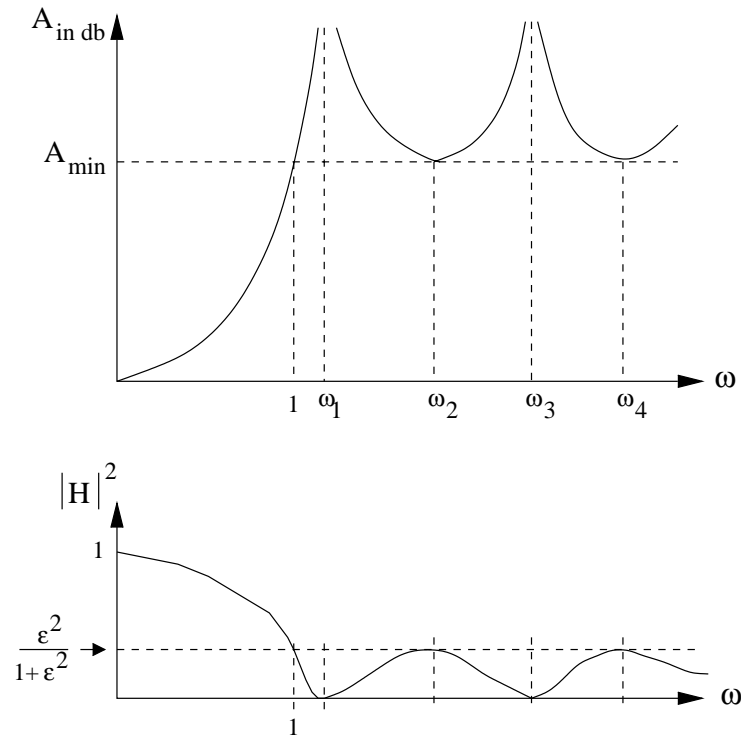


Figure 2.7: Damping- en amplitudekarakteristiek bij een inverse Chebyshev benadering

## 2.5 De Chebyshev rationale functie benadering

In dit geval schrijven we algemeen:

$$|H(s)|_{s=j\omega}^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\omega)} \quad (2.23)$$

In dit geval is  $R_n(\omega)$  geen polynoom meer, maar een rationale functie in  $\omega$ , met nulpunten en polen dus.

Aangetoond kan worden dat voor een gegeven orde n, deze methode van benadering (ook wel Cauer benadering genoemd) de meeste selektiviteit (de smalste transitieband) oplevert.

Vanwege de symmetrie die in deze methode van benadering aanwezig is, zullen we een iets andere frekwentie normalisatie gebruiken.

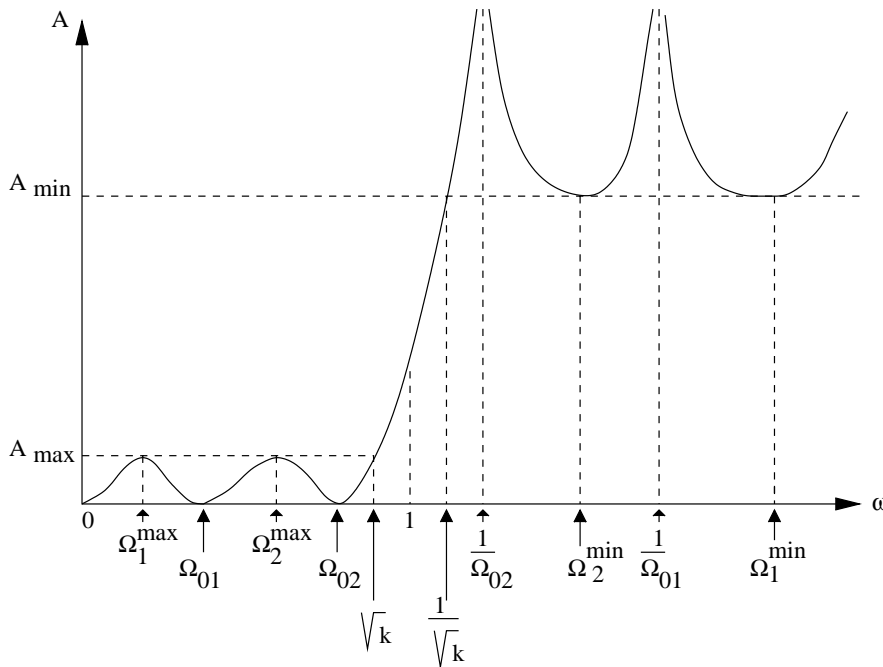


Figure 2.8: voorbeeld van een Cauer dempingskarakteristiek

In de figuur geldt: (vijfde orde Cauer voorbeeld)

$$k = \frac{\omega_{pass}}{\omega_{sper}} < 1 \quad \text{en:} \quad \omega_{pass}^2 \cdot \omega_{sper}^2 = \frac{1}{k} \cdot k = 1 \quad (2.24)$$

(voor een hoge orde benadering is  $k$  dus bijna 1)

Voor de functie  $R(\omega)$  zal gelden:

1. De functie  $R$  heeft nulpunten bij:

0 (alleen voor  $n = \text{oneven}$ ),  $\pm\Omega_{01}$ ,  $\pm\Omega_{02}$ .....

2. De functie  $R$  heeft polen:

$\infty$  ( $n = \text{oneven}$ ),  $\pm\Omega_{\infty 1}$ ,  $\pm\Omega_{\infty 2}$ , ..

3.  $R^2$  heeft de waarde 1 voor: (in de doorlaatband)

$\omega = 0$  ( $n = \text{even}$ ),  $\pm\Omega_1^{max}$ ,  $\pm\Omega_2^{max}$ , .....  $\pm\sqrt{k}$

4.  $R^2$  heeft de waarde  $\frac{1}{k_1^2}$  voor: (in de sperband)

$\omega \Rightarrow \infty$  ( $n = \text{even}$ ),  $\omega = \pm\Omega_1^{min}$ ,  $\pm\Omega_2^{min}$ , ....  $\pm\frac{1}{\sqrt{k}}$

In de doorlaatband, voor de frekwenties waarvoor geldt:  $R^2(\omega) = 1$  geldt dus:

$$|R(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2}.$$

of:  $A_{max} = -10 \log(1 + \epsilon^2) \Rightarrow 1 + \epsilon^2 = 10^{0.1A_{max}}$ .

of:

$$\epsilon^2 = 10^{0.1A_{max}} - 1 \tag{2.25}$$

In de sperband, voor de frekwenties waarvoor geldt:  $R^2(\omega) = \frac{1}{k_1^2}$  geldt dus:

$$|R(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon^2}{k_1^2}}$$

of:

$$A_{min} = -10 \log\left(1 + \frac{\epsilon^2}{k_1^2}\right) \Rightarrow 1 + \frac{\epsilon^2}{k_1^2} = 10^{0.1A_{min}}$$

of:

$$\frac{\epsilon^2}{k_1^2} = 10^{0.1A_{min}} - 1.$$

nu, met  $\epsilon^2$  ingevuld, geeft:

$$k_1^2 = \frac{\epsilon^2}{10^{0.1A_{min}} - 1} = \frac{10^{0.1A_{max}} - 1}{10^{0.1A_{min}} - 1} \quad (2.26)$$

Voor deze Cauer benadering kan worden aangetoond dat er geldt:

1.

$$\Omega_{\infty i} = \frac{1}{\Omega_{0i}}$$

2.

$$\Omega_i^{max} = \frac{1}{\Omega_i^{min}}$$

Bovendien blijkt dat:

Voor n = oneven:

$$R_n(\omega) = \frac{(-1)^r \omega}{\sqrt{k_1}} \prod_{i=1}^r \frac{\omega^2 - \Omega_i^2}{1 - \omega^2 \Omega_i^2} \quad r = \frac{n-1}{2} \quad (2.27)$$

Hierin is:

$$\Omega_i = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left(\frac{2Ki}{n}, k\right) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.28)$$

Bovendien geldt:

$$\Omega_i^{max} = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left(\frac{(2i-1)K}{n}, k\right) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.29)$$

Hierin is  $\operatorname{sn}(u, k)$  de elliptische sinusfunctie met modulus  $k$  en  $K_{(k)}$  is een kwart periode van deze elliptische sinusfunctie.

Voor n=even:

$$R_n(\omega) = \frac{(-1)^r}{\sqrt{k_1}} \prod_{i=1}^r \frac{\omega^2 - \Omega_i^2}{1 - \omega^2 \Omega_i^2} \quad r = \frac{n}{2} \quad (2.30)$$

met daarin:

$$\Omega_i = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left(\frac{(2i-1)K}{n}, k\right) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.31)$$

ook geldt:

$$\Omega_i^{max} = \sqrt{k} \operatorname{sn}\left(\frac{2iK}{n}, k\right) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.32)$$

Bij een berekening van  $K_{(k)}$  kunnen we de volgende benadering gebruiken:

$$K_{(k)} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right\} \quad (2.33)$$

En voor  $\operatorname{sn}(u, k)$  met  $u$  hier reeel:

$$\operatorname{sn}(u, k) = u - (1 + k^2) \frac{u^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4) \frac{u^5}{5!} - (1 + 135k^2 + 135k^4 + k^6) \frac{u^7}{7!} + \dots \quad (2.34)$$

Zie figuur 2.9 voor het verloop van  $R_5(\omega)$ .

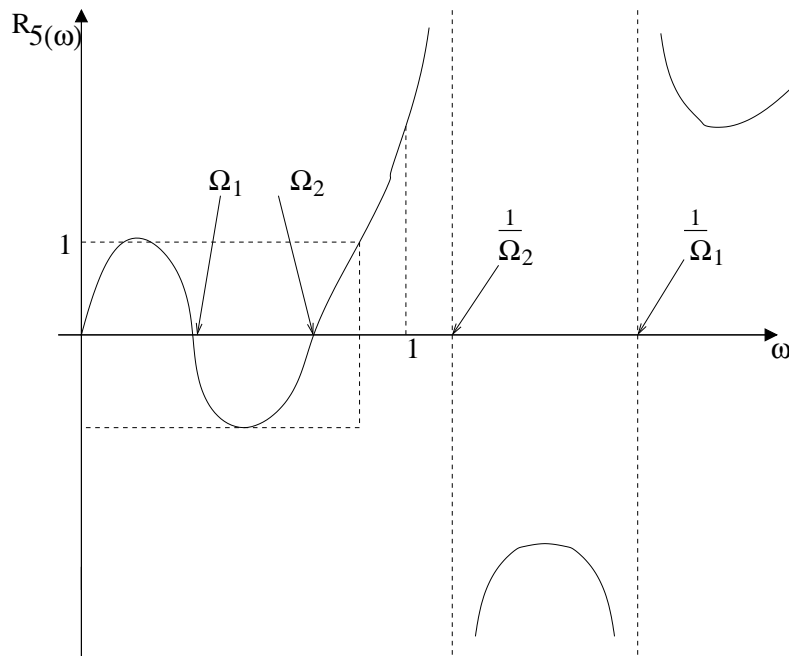


Figure 2.9: verloop van  $R_5$

**Belangrijk:**

In het voorgaande hebben we 3 ontwerpparameters voor een Cauer benadering voorbij zien komen, namelijk:

De ontwerpparameters:  $k$ ,  $k_1$  en  $n$ .

Deze zijn echter niet onafhankelijk van elkaar te kiezen!

Dit is eigenlijk wel logisch, er bestaat echter een duidelijk verband tussen deze drie parameters dat niet meteen vanzelf spreekt. Dit volgt wel uit de theorie van de elliptische functies die een sleutelrol speelt bij deze benaderingsmethode. Dus: twee van de drie parameters kunnen vrij worden gekozen, de derde ligt dan vast. Het verband is echter niet bepaald een simpel verband te noemen, hieronder volgt het verband tussen de drie.

$$\frac{nK_1}{K} = \frac{K'_1}{K_1} \quad (2.35)$$

Hierin is:

$$K = K_{(k)} \quad (2.36)$$

$$K_1 = K_{(k_1)} \quad (2.37)$$

$$K' = K_{(k')} \quad \text{met :} \quad k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (2.38)$$

$$K'_1 = K_{(k'_1)} \quad \text{met :} \quad k'_1 = \sqrt{1 - k_1^2} \quad (2.39)$$

In de volgende paragrafen komt deze relatie tussen de parameters nog terug.

Er bestaat nog een relatie tussen de drie ontwerpparameters  $n$ ,  $k$  en  $k_1$ :

$$\sqrt{k_1} = \sqrt{k^n} \prod_{i=1}^l \operatorname{sn}^2\left(\frac{(2i-1)K_{(k)}}{n}, k\right) \quad \text{voor: } n = 2l \text{ of: } n = 2l + 1. \quad (2.40)$$

Als we  $n$  willen weten als  $k$  en  $k_1$  bekend zijn, gebruiken we dus vergelijking 2.35, terwijl als  $k$  en  $n$  bekend zijn, kunnen we vergelijking 2.40 gebruiken.

## 2.6 Introductie in de elliptische functies voor een beter begrip van de Caer benaderingsmethode

De Legendre elliptische integraal van de eerste soort kan geschreven worden als:

$$\mu(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad 0 \leq k < 1 \quad (2.41)$$

$k$  heet de modulus en  $\phi$  de amplitude van de integraal.



Voor reële waarde van  $\phi$  is  $\mu(\phi, k)$  reël en is het oppervlak tussen de curve

$$I = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

en de verticale lijnen  $\theta = 0$  en  $\theta = \phi$  in figuur 2.10.

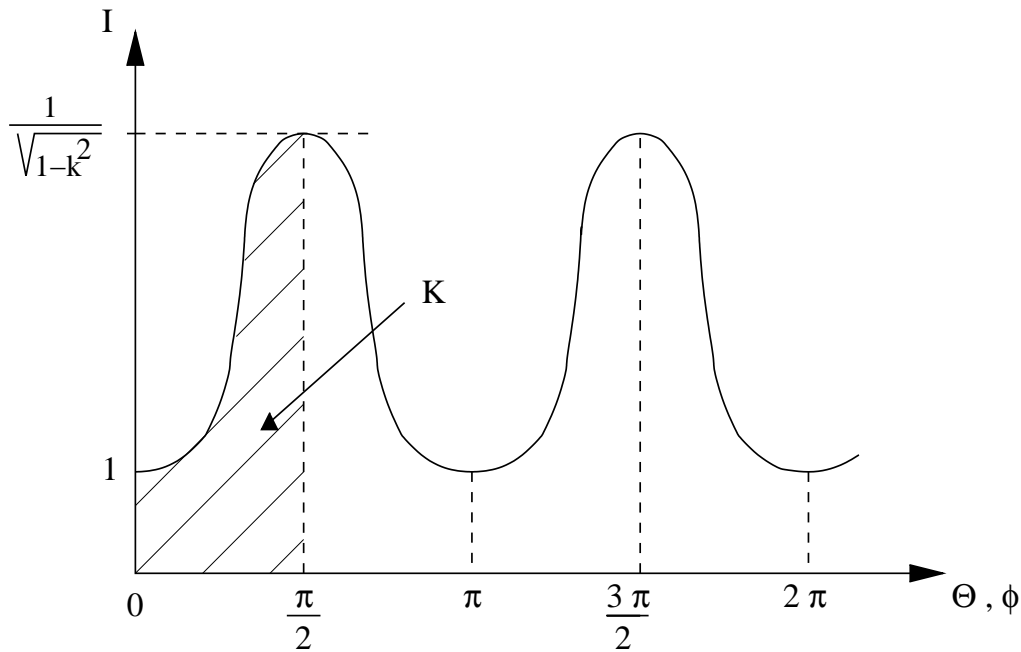


Figure 2.10: verloop van  $I$  als functie van  $\theta$  en  $\phi$

$I$  heeft minima van 1 bij  $\theta = 0, \pi, 2\pi, \dots$

en maxima van  $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$  bij  $\theta = \pi/2, 3\pi/2, \dots$

$I$  is periodiek in  $\theta$  met periode  $\pi$ .

Het gestreepte oppervlak in figuur 2.10 heet de complete elliptische integraal van de eerste soort en is:

$$\mu(\pi/2, k) = K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.42)$$

We kunnen zeggen dat er bij een gegeven  $k$  een eenduidige relatie bestaat tussen  $\mu$  en  $\phi$

We kunnen dan ook schrijven:

$$\phi = f(\mu, k).$$

De Jacobi elliptische functies zijn gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} sn(u, k) &= \sin\phi \\ cn(u, k) &= \cos\phi \\ dn(u, k) &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi} \end{aligned}$$

Er geldt bijvoorbeeld ook:

$$\begin{aligned} sn^2(u, k) + cn^2(u, k) &= 1 \\ k^2 sn^2(u, k) + dn^2(u, k) &= 1 \end{aligned}$$

Uit figuur 2.11 blijkt dat  $sn(u, k)$  en  $cn(u, k)$  periodiek zijn met periode  $4K$ . Tot zover hebben we de variable  $u$  reel verondersteld. Bekijken we nu het geval dat  $u$  imaginair is:  $u = jv$ .

$$jv = \int_0^\psi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}$$

Dus nu:

$$\begin{aligned} sn(jv, k) &= \sin\psi \\ cn(jv, k) &= \cos\psi \\ dn(jv, k) &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi} \end{aligned}$$

Passen we nu de transformatie toe:

$$\sin\theta = j \tan\theta' \quad \sin\psi = j \tan\psi'$$

dan:

$$jv = \int_0^{\psi'} \frac{j d\theta'}{\sqrt{1 - \sin^2\theta' + k^2 \sin^2\theta'}}$$

of:

$$v = \int_0^{\psi'} \frac{d\theta'}{1 - (k')^2 \sin^2\theta'} \quad k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (2.43)$$

$k'$  heet de complementaire modulus.

Als verdere analogie geldt:

$$K_{(k')} = K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (k')^2 \sin^2\theta}} \quad (2.44)$$

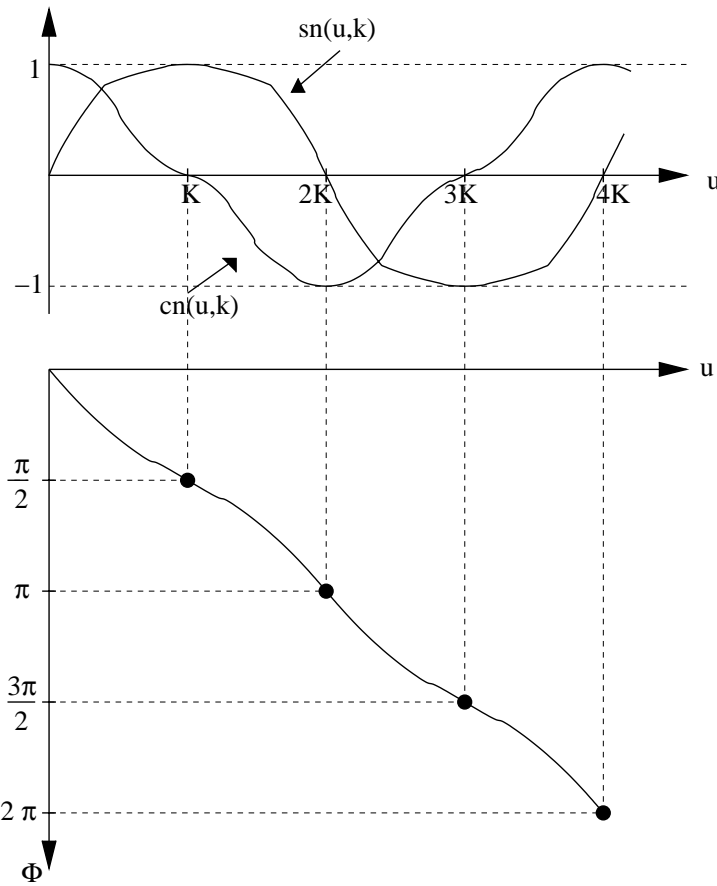


Figure 2.11: verloop van  $sn$ ,  $cn$  en  $\phi$  als functie van  $u$ .

$K'$  heet de complementaire complete integraal van de eerste soort en is nu  $1/4$  periode van  $sn(v,k')$ .

De functie  $sn(jv,k)$  (en ook  $cn(jv,k)$ ) is een periodieke functie van  $jv$  met periode  $j2K'$ . Zie figuur 2.12.

**Conclusie:**

$sn(z, K_1)$  is een dubbelperiodieke functie van de complexe variabele  $z$  (met  $z = u + jv$ ):

$$sn(z, k) = sn(z + 4mK + j2nK', k)$$

$sn(z, k_1)$  ziet er uit als in figuur 2.13.

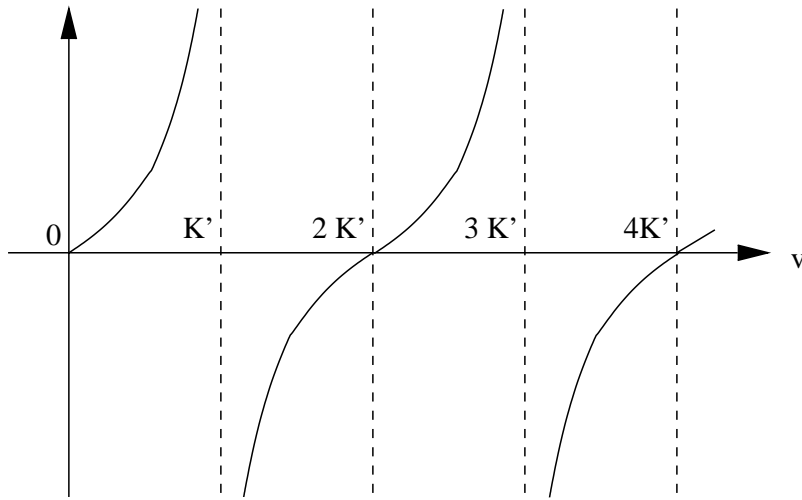


Figure 2.12: verloop van  $\text{sn}(jv, k)$  als functie van  $jv$ .

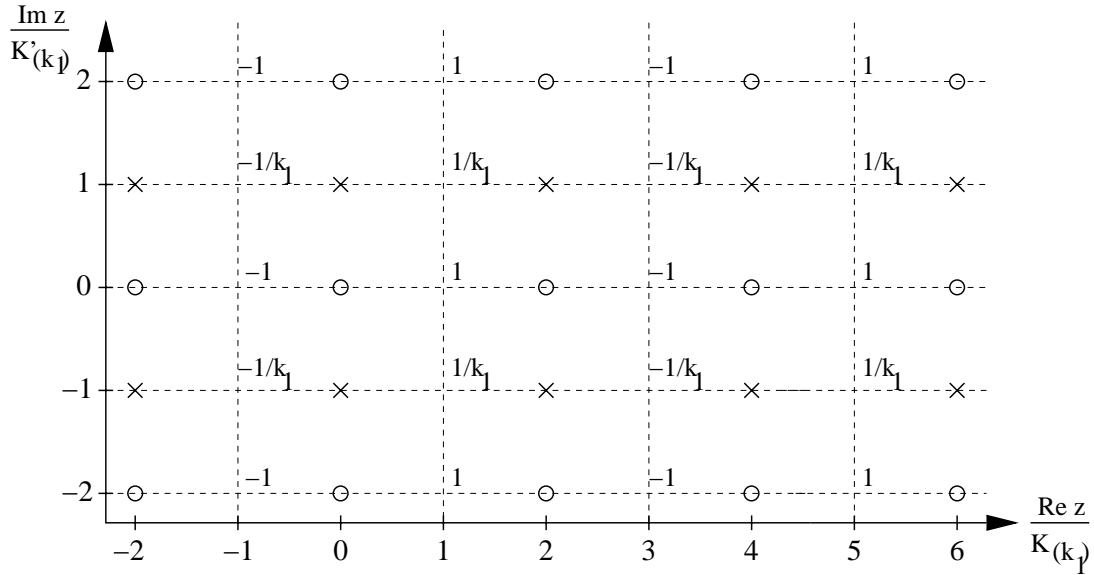


Figure 2.13: Een deel van het polen en nulpunten beeld van  $\text{sn}(z, k_1)$

Langs de horizontale streeplijn door de oorsprong in figuur 2.13 varieert de functie tussen  $+1$  en  $-1$  zoals aangegeven. Vertikaal door de oorsprong, door de nulpunten en de polen, verloopt de functie zoals is geschetst in figuur 2.12. Langs de horizontale streeplijn, boven de lijn door de oorsprong, vinden we uitsluitend polen. De functie verloopt tussen die polen afwisselend met een positief minimum en een negatief maximum. Precies het verloop dat een Cauchy benaderingsfunctie  $R$  zou moeten vertonen in de sperband. Langs de horizontale lijn door de oorsprong hebben we een verloop dat we willen in de doorlaatband van een Cauchy benaderingsfunctie  $R$ .

Door nu een geschikte contour in dit dubbelperiodieke vlak langs te lopen, kunnen we het complete verloop van een Cauchy benadering volgen.

In figuur 2.14 is een contour geschetst die uiteindelijk een vijfde orde Cauchy karakteristiek gaat opleveren. Duidelijk is te zien hoe de polen en nulpunten van die karakteristiek ten opzichte van elkaar liggen.

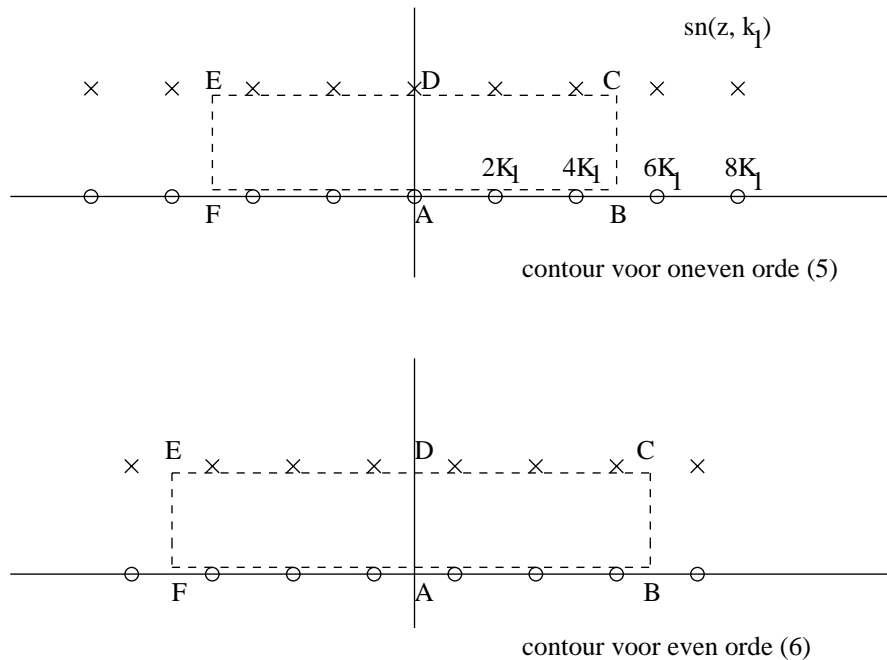


Figure 2.14: Contouren in het polen en nulpunten beeld van  $\text{sn}(z, k_1)$

- Punt A moet dan corresponderen met  $\omega = 0$ ,
- Punt B moet dan corresponderen met  $\omega = \sqrt{k}$ ,
- Punt C moet dan corresponderen met  $\omega = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ,
- Punt D moet dan corresponderen met  $\omega = \infty$ ,

Punt E moet dan corresponderen met  $\omega = -\frac{1}{\sqrt{k}}$ ,

Punt F moet dan corresponderen met  $\omega = -\sqrt{k}$ ,

De afbeelding die deze contour afbeeldt op de imaginaire  $\omega$ -as in het  $s$ -vlak is:

$$s = j\sqrt{k}sn(z, k) \quad (2.45)$$

Het door de contour omsloten deel van het  $z$ -vlak wordt afgebeeld op het linkerdeel van het  $s$ -vlak. Hierbij moet steeds gelden dat  $n$  kwart periodes  $K_1$  moeten overeenkomen met een kwart periode  $K$ . Meer precies: de relatie 2.35 moet gelden.

Een en ander wordt duidelijker (voor  $n = 5$ ) in figuur 2.15.

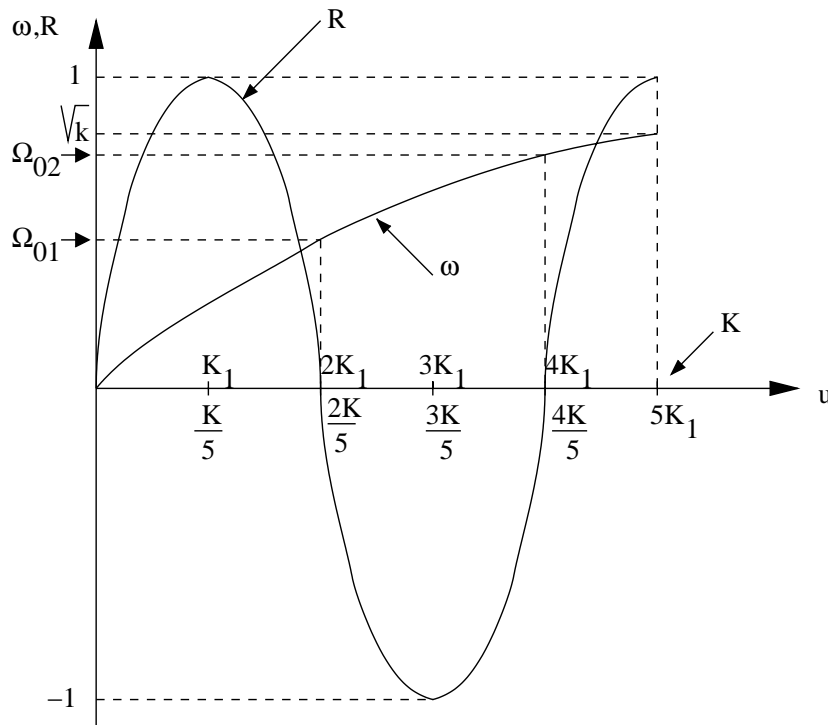


Figure 2.15: Afbeelding langs de  $u$ -as voor  $n = 5$ , tussen  $R$  en  $\omega$

In de figuur 2.15 geldt langs de  $u$ -as:

$$R_{(u)} = sn\left(\frac{5K_1}{K}u, k_1\right)$$

Algemeen:

n = oneven:

$$R_{(u)} = sn\left(\frac{nK_1}{K}u, k_1\right) \quad (2.46)$$

n = even:

$$R_{(u)} = sn\left(\frac{5K_1}{K}u + K_1, k_1\right) \quad (2.47)$$

Hierbij moet steeds relatie 2.35 gelden.

Met het voorgaande is, zeer globaal en onvolledig, de achtergrond van het ontstaan van de vergelijkingen 2.27 tot en met 2.32 toegelicht.

$$\omega = \sqrt{k}sn(u, k) \quad (0 \leq u \leq K) \quad (2.48)$$

Hieronder volgen tenslotte nog formules waarmee de elliptische sinus functie kan worden uitgerekend. De sn functie is hiervoor uitgedrukt in  $\theta$  functies als volgt:

$$sn(z, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1\left(\frac{z}{2K}, q\right)}{\theta_0\left(\frac{z}{2K}, q\right)} \quad (2.49)$$

Met hierin:

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}} \quad (2.50)$$

$$\theta_0\left(\frac{z}{2K}, q\right) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos\left(2m \frac{\pi z}{2K}\right) \quad (2.51)$$

$$\theta_1\left(\frac{z}{2K}, q\right) = 2q^{\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{m(m+1)} \sin\left((2m+1) \frac{\pi z}{2K}\right) \quad (2.52)$$

## 2.7 De Bessel-Thomson benadering voor lineair fase verloop

Tot op dit moment hebben we ons gericht op amplitude karakteristieken. Er zijn echter ook toepassingen waarin de fase van een filter functie belangrijk is, of, nog vaker: de "group-delay"  $T_d(\omega)$ .

Voorbeeld:

$$H(s) = \frac{b_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$

dan is de fase functie  $\Phi(\omega)$ :

$$\Phi(\omega) = -\tan^{-1}\left[\frac{b_1\omega}{b_0 - \omega^2}\right]$$

en de group-delay  $T_d(\omega)$ :

$$T_d(\omega) = -\frac{d\Phi}{d\omega} = \frac{b_1\omega^2 + b_1b_0}{\omega^4 + (b_1^2 - 2b_0)\omega^2 + b_0^2}$$

Algemene theorie:

Voor een vervormingsvrije overdracht is het nodig dat voor de impulsresponsie geldt:

$$h(t) = \delta(t - \tau).$$

Hierin is  $\tau$  de group-delay.

Voor het frekwentiedomein geldt:

$$H(s) = e^{-s}.$$

(delay genormaliseerd op 1 sec.).



We kunnen ook schrijven:

$$H(s) = \frac{1}{e^s} = \frac{1}{\sinh s + \cosh s}$$

Voor een "all-pole" rationale funktie benadering hiervan, zal gelden:

$$H_n(s) = \frac{k}{M(s) + N(s)} \approx H(s).$$

Hierin zijn M en N het even en oneven deel van het noemerpolynoom.

En:

$$\frac{M(s)}{N(s)} \approx \frac{\cosh s}{\sinh s}$$

Voor dit kunnen we schrijven m.b.v.

$$\cosh s = 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh s = s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \dots$$

Na deling:

$$\frac{\cosh s}{\sinh s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{1}{\frac{7}{s} + \dots}}}$$

Voor een eindige  $H_n(s)$  breken we deze ontwikkeling gewoon af.

$$n = 3 : \quad \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s}}} = \frac{6s^2 + 15}{s^3 + 15s}$$

en dan:

$$H_3(s) = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$$

Hierin is de teller zo gekozen dat  $H(s)$  voor  $s=0$ : gelijk is aan 1.

Algemeen:

$$H_n(s) = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

dan kan worden afgeleid dat voor  $b_k$  geschreven dient te worden:

$$b_k = \frac{(2n - k)!}{2^{n-k} \cdot k! (n - k)!}$$

Filters die hiermee worden verkregen heten Bessel filters, Thomson filters, of maximaal vlakke delay filters.

Deze maximaal vlakke delay karakteristieken zijn getoond in figuur 2.16.

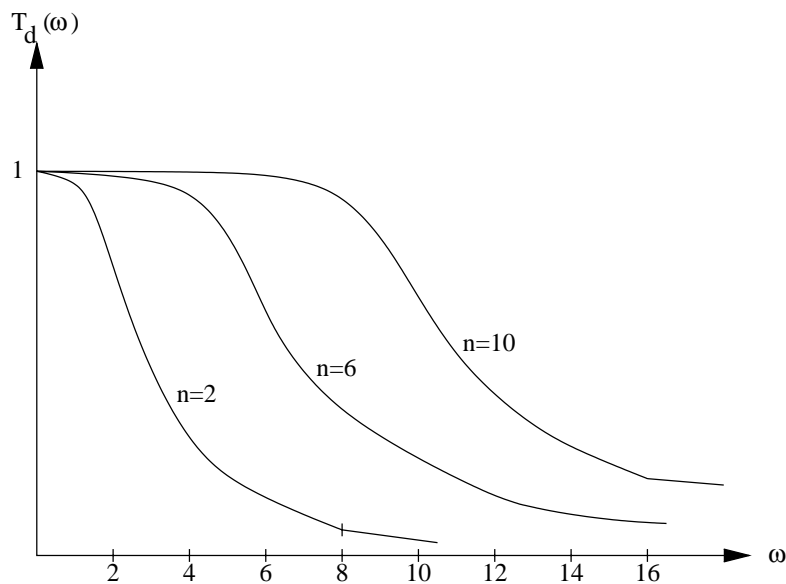


Figure 2.16: Maximaal vlakke delay karakteristieken

Ter vergelijking wordt in onderstaande figuur 2.17 verschillende 4<sup>e</sup> orde functies met elkaar vergeleken voor de amplitude karakteristiek.

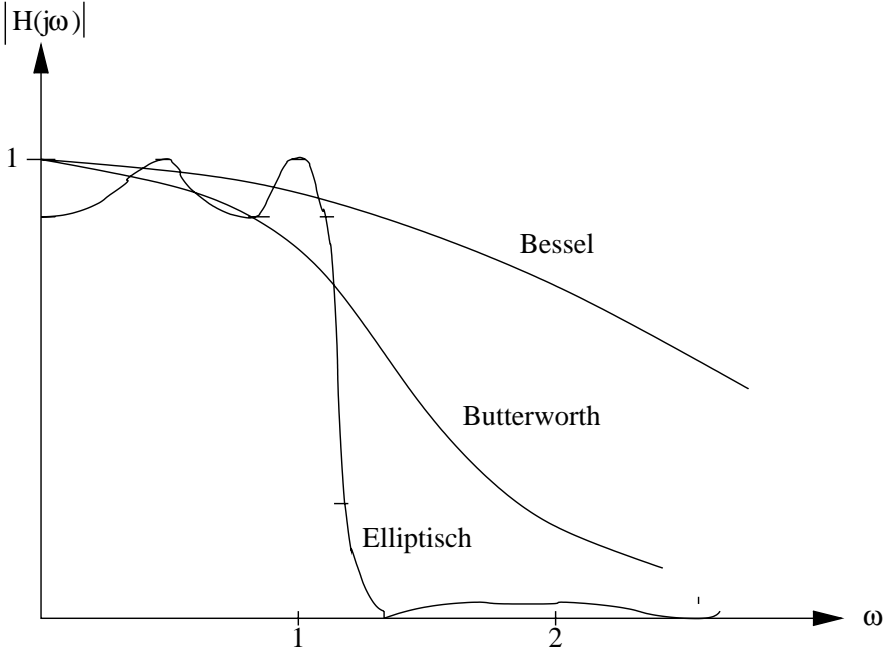


Figure 2.17: Verschillende amplitude karakteristieken vergeleken

Hierna wordt hetzelfde gedaan voor de delay karakteristiek.

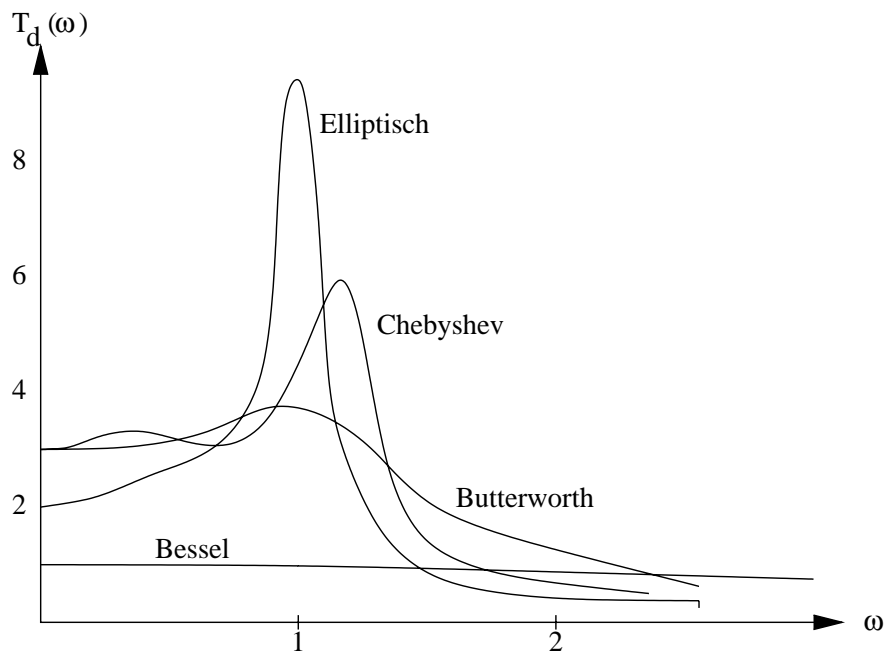


Figure 2.18: Verschillende delay karakteristieken vergeleken

## 2.8 Combinatie van de benaderingsmethoden

We hebben nu een aantal bekende benaderingsmethoden kort de revue laten passeren. Het wil echter nog lang niet betekenen dat we nu alles kunnen ontwerpen wat we zouden willen.

Bijvoorbeeld: we zouden misschien een lineaire fase benadering willen combineren met een inverse Chebyshev benadering. Dit levert ons wellicht een redelijk selektieve benadering met een redelijk lineair fase verloop.

Later, als we het hebben over microgolffilters waar het eenheidselement een grote rol speelt als netwerkelement, zullen we andere wensen hebben wat mogelijke gewenste karakteristieken betreft.

Bijvoorbeeld, het optimaal gebruik van eenheidselementen in een Cauer karakteristiek laagdoorlaat is nooit analytisch opgelost. Een mogelijkheid is dan te proberen met combinaties van methoden iets te bereiken wat op een andere manier niet kan worden bereikt.

Een bruikbare methode is de funktie  $F(\omega^2)$  te schrijven als een produkt.

$$F(\omega^2) = F_1(\omega^2).F_2(\omega^2) \quad (2.53)$$

Op deze manier blijven nulpunten en polen van  $F_1$  en  $F_2$  nulpunten en polen van  $F$ . Het is natuurlijk wel zo dat de orde van  $F$  de som wordt van de ordes van  $F_1$  en  $F_2$ .

## 2.9 Enkele frekwentie-transformaties.

### 2.9.1 De standaard transformaties

We hebben in het voorgaande een aantal van de meest bekende standaard benaderingsmethoden besproken. Hieruit kunnen via eenvoudige transformaties ook hoogdoorlaat- en banddoorlaatfuncties worden verkregen. Dit bespreken we in deze paragraaf.

Deze transformaties zijn (zie figuur 2.9):

1.  $s \rightarrow \alpha_1 s'$  (denormalisatie langs de imaginaire as).
2.  $s \rightarrow \frac{1}{\alpha_2 s'}$  (transformatie naar hoogdoorlaat).
3.  $s \rightarrow \frac{s'^2 + a^2}{b s'}$  (transformatie naar banddoorlaat).

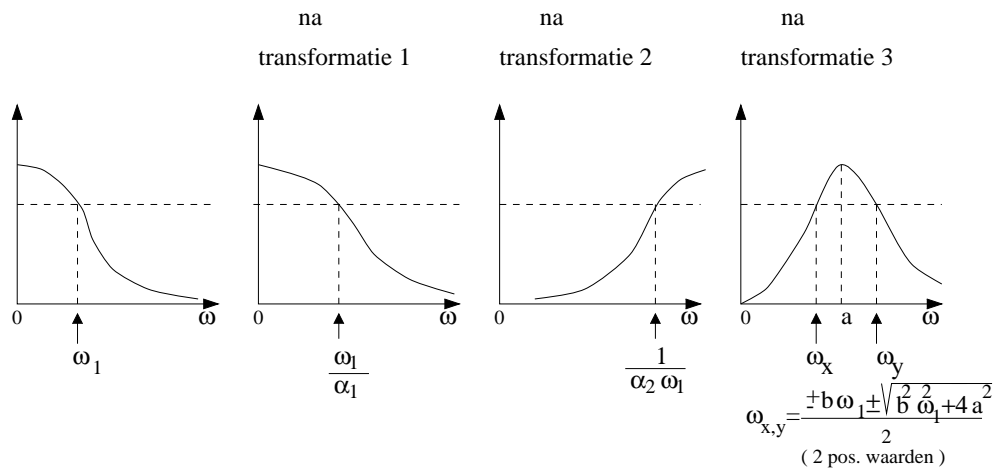


Figure 2.19: effect van de transformaties

### 2.9.2 De Skwirzynski transformatie.

Zoals we hebben gezien toen de Chebyshev benadering werd behandeld, begint de even orde Chebyshev polynoom voor  $\omega = 0$  niet met de waarde 0 maar met een waarde  $\neq 0$ .

Voor de Inverse Chebyshev benadering van even orde geldt dat voor  $\omega \rightarrow \infty$  de functie naar een eindige waarde gaat.

Ook voor de even orde Cauer benadering hebben we dat. Hier geldt dat de functie zowel voor  $\omega = 0$  als voor  $\omega \rightarrow \infty$  een eindige waarde  $\neq 0$  aanneemt. Vooral deze eigenschap van de even orde Cauer benadering is voor een belangrijke implementatievorm voor deze benaderingsmethode (de verliesvrije ladderstructuur tussen een bron met inwendige weerstand en een belastingsweerstand) een probleem. Het maakt dat de even orde benadering in die vorm niet gerealiseerd kan worden. Dit zullen we later in meer detail zien.

Het is Skwirzynski geweest die een frekwentie transformatie heeft gedemonstreerd waarmee deze problemen kunnen worden verholpen.

Deze transformatie ziet er als volgt uit:

$$\omega^2 \rightarrow \frac{a\Omega^2 + b}{c\Omega^2 + d} \quad (2.54)$$

Hiermee kunnen we dus de frekwentie-as vervormen. Zoals blijkt uit de formule kunnen we deze meteen toepassen op de functies  $F(\omega^2)$  die we zijn tegengekomen bij Butterworth, Chebyshev en Cauer.

#### Voorbeeld 1:

Stel we hebben de 4<sup>e</sup> orde Chebyshev benadering:

$$T_4^2 = 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1. \quad (2.55)$$

Zie figuur 2.20a.

We hebben 3 vrijheidsgraden in de transformatie en we kunnen dus 3 eisen stellen aan de karakteristiek:

- Stel we willen dat voor  $\omega \rightarrow \infty$  ook geldt:  $\Omega \rightarrow \infty$ .

Dat betekent voor de transformatie:  $c=0$ .

Er blijft dan over:  $\omega^2 \rightarrow a_1\Omega^2 + b_1$

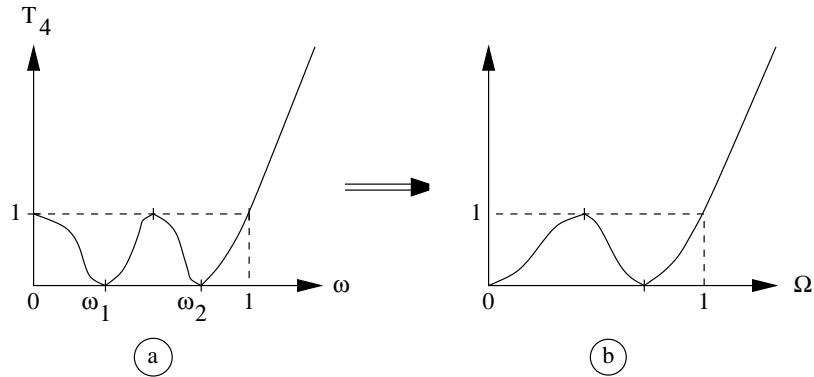


Figure 2.20: Een vierde orde Chebyshev benadering en een getransformeerde versie.

- Stel we willen dat geldt:  $\omega = \omega_1 \rightarrow \Omega = 0$ .  
Dit betekent:  $b_1 = \omega_1^2$
- Stel we willen dat geldt:  $\omega = 1 \rightarrow \Omega = 1$ .  
Dit betekent:  $a_1 = 1 - \omega_1^2$

De transformatie wordt dus voor dit geval:

$$\omega^2 \rightarrow (1 - \omega_1^2)\Omega^2 + \omega_1^2 \quad (2.56)$$

Hiermee gaat figuur 2.20a over in figuur 2.20b.

We hebben nu nog steeds een vierde orde benadering maar nu een iets minder optimale karakteristiek gekregen, die echter nu bij  $\omega = 0$  wel bij de waarde 0 begint.

#### Opmerking 1:

We hebben er voor gekozen om de frekwentie  $\omega_1$  te verschuiven naar  $\omega = 0$  terwijl dit een nulpunt van de karakteristiek betrof, op deze manier hebben we bereikt dat de nieuwe karakteristiek bij 0 begon. We hadden als  $\omega_1$  ook een frekwentie tussen  $\omega_1$  en 0 kunnen kiezen, het resultaat was dan dat de nieuwe karakteristiek bij een andere waarde dan 1 zou begonnen zijn. We hadden dan echter wel 2 nulpunten gehouden.

#### Opmerking 2:

Het voorbeeld ging over een 4<sup>e</sup> orde Chebyshev benadering, de methode gaat natuurlijk op voor een willekeurige even orde Chebyshev benadering. Som-



mige tabellen boeken tabelleren ook deze variant van de even orde Chebyshev benadering.

**Voorbeeld 2:**

Een 4<sup>e</sup> orde Inverse Chebyshev benadering ziet er uit als in figuur 2.21a. Voor  $\omega \rightarrow \infty$  gaat de karakteristiek naar de eindige waarde M. Door middel van de Skwirzynski transformatie willen we bereiken dat voor  $\omega \rightarrow \infty$  de waarde naar  $\infty$  gaat. Om dit te bereiken gaan we de pool bij  $\omega = \omega_2$  naar  $\infty$  verschuiven ten koste van enige selektiviteit.

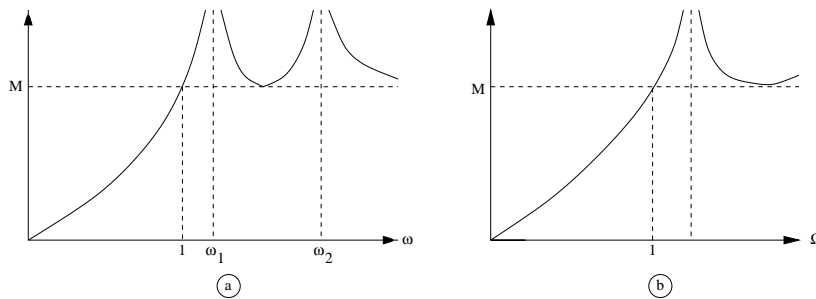


Figure 2.21: Een vierde orde Inverse Chebyshev benadering en een getransformeerde versie.

De 3 vrijheidsgraden gaan we als volgt besteden:

- 

$$\omega = 0 \rightarrow \Omega = 0 \rightarrow b = 0.$$

De transformatie luidt nu:

$$\omega^2 \rightarrow \frac{a_1 \Omega^2}{\Omega^2 + a_2}$$

- 

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \Omega \rightarrow \infty \rightarrow a_1 = \omega_2^2$$

- 

$$\omega = 1 \rightarrow \Omega = 1 \rightarrow a_2 = \omega_2^2 - 1$$

Hiermee wordt de transformatie:

$$\omega^2 \rightarrow \frac{\omega_2^2 \Omega^2}{\Omega^2 + (\omega_2^2 - 1)} \quad (2.57)$$

**Voorbeeld 3:**

De even orde Cauer benadering  $C_{04}$  ziet er uit als in figuur 2.22a. (In tabellen ook wel  $C_{04a}$  genoemd). We kunnen deze karakteristiek op 3 manieren transformeren:

Mogelijkheid 1:  $\omega_0 \rightarrow 0$  en  $\omega_2 \rightarrow \infty$

Mogelijkheid 2:  $\omega_2 \rightarrow \infty$

Mogelijkheid 3:  $\omega_0 \rightarrow 0$ .

**Mogelijkheid 1:**

De 3 vrijheidsgraden gaan we als volgt gebruiken:

•

$$\omega = \omega_0 \rightarrow \Omega = 0 \rightarrow \frac{b}{d} = \omega_0^2$$

Dus nu is de transformatie:

$$\omega^2 \rightarrow \frac{a_1 \Omega^2 + \omega_0^2}{a_2 \Omega^2 + 1}$$

•

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \Omega \rightarrow \infty \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \omega_2^2$$

•

$$\omega = 1 \rightarrow \Omega = 1 \rightarrow a_2 = \frac{1 - \omega_0^2}{\omega_2^2 - 1}$$

Hiermee wordt de transformatie:

$$\omega^2 \rightarrow \frac{\omega_2^2 \Omega^2 (1 - \omega_0^2) + \omega_0^2 (\omega_2^2 - 1)}{\Omega^2 (1 - \omega_0^2) + \omega_2^2 - 1} \quad (2.58)$$

Het resultaat na transformatie ziet er uit als in figuur 2.22b

**Mogelijkheid 2:**

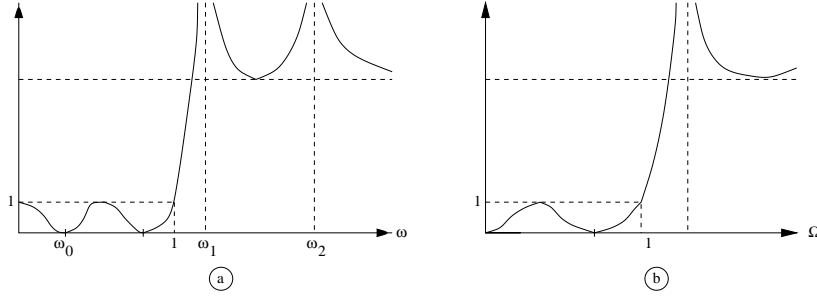


Figure 2.22: Een vierde orde Cauer benadering en een van de getransformeerde versies.

•

$$\omega = 0 \rightarrow \Omega = 0 \rightarrow b = 0$$

Dus nu is de transformatie:

$$\omega^2 \rightarrow \frac{a_1 \Omega^2}{\Omega^2 + a_2}$$

•

$$\omega = \omega_2 \rightarrow \Omega \rightarrow \infty \rightarrow \omega_2^2 = a_1.$$

•

$$\omega = 1 \rightarrow \Omega = 1 \rightarrow a_2 = \omega_2^2 - 1$$

De transformatie wordt in dit geval dus:

$$\omega^2 \rightarrow \frac{\omega_2^2 \Omega^2}{\Omega^2 + \omega_2^2 - 1} \tag{2.59}$$

Mogelijkheid 3:

•

$$\omega \rightarrow \infty \rightarrow \Omega \rightarrow \infty \rightarrow c = 0.$$

De transformatie luidt dus nu:

$$\omega^2 \rightarrow \frac{a\Omega^2 + b}{d} = a_1\Omega^2 + a_2$$

•

$$\omega = \omega_1 \rightarrow \Omega = 0 \rightarrow \omega_1^2 = a_2$$

•

$$\omega = 1 \rightarrow \Omega = 1 \rightarrow a_1 = 1 - \omega_1^2$$

**De transformatie wordt dus in dit geval:**

$$\omega^2 \rightarrow (1 - \omega_1^2)\Omega^2 + \omega_1^2 \tag{2.60}$$

**In sommige tabellen wordt behalve mogelijkheid 1 ook nog andere varianten van de even orde Cauer benadering getabelleerd.**

## 2.10 Enkele vragen + uitwerking

### Vraag 1:

Wat is de waarde van  $|H|_{s=j\omega}^2$  voor de eerste, tweede en derde orde Butterworth benadering voor  $\omega = 0, 0.5, 1$  en  $2$ .

Antwoord:

$$|H|_{s=j\omega}^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$$

$\omega$	n=1	n=2	n=3
0	1	1	1
0.5	0.8	0.941	0.9846
1	0.5	0.5	0.5
2	0.2	0.0625	0.0154

### Vraag 2:

Wat is de waarde van  $|H|_{s=j\omega}^2$  voor de eerste, tweede en derde orde Chebyshev benadering voor  $\omega = 0, 0.5, 1$  en  $2$  en dat voor  $\epsilon = 0.5$  en  $\epsilon = 0.25$ .

Antwoord:

orde 1:

$$|H|_{s=j\omega}^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega^{2n}}$$

orde 2:

$$|H|_{s=j\omega}^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (2\omega^2 - 1)^2}$$

orde 3:

$$|H|_{s=j\omega}^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (4\omega^3 - 3\omega)^2}$$

$\omega$	n=1	n=1	n=2	n=2	n=3	n=3
	$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 0.25$	$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 0.25$	$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 0.25$
0	1	1	0.8	0.941	1	1
0.25	0.941	0.985	0.941	0.985	0.8	0.941
1	0.8	0.941	0.8	0.941	0.8	0.941
2	0.5	0.8	0.0755	0.246	0.0059	0.0231

**Vraag 3:**

Hoeveel frekwentie punten ( $\omega \neq 0$ ) zijn er waarvoor geldt:  $|H|_{s=j\omega}^2 = 1$  voor:  $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$ .

**Antwoord:**

$T_0$ : aantal punten is 0.

$T_1$ :

$$T_1 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega^2}$$

Aantal punten is 0 (alleen bij  $\omega = 0$ ).

$T_2$ :

$$T_2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (2\omega^2 - 1)^2}$$

Aantal punten is 1 (bij  $2\omega^2 = 1$ ,  $\omega^2 = 0.5$ ,  $\omega = 0.707$ )

$T_3$ :

$$T_3 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (4\omega^3 - 3\omega)^2}$$

Aantal punten is 1 (bij  $4\omega^2 - 3 = 0$ ,  $\omega = 0.866$ ).

$T_4$ :

$$T_4 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (8\omega^4 - 8\omega^2 + 1)^2}$$

Aantal punten is 2 ( bij  $8\omega^4 - 8\omega^2 + 1 = 0$ ,  $\omega = 0.9239$  en  $\omega = 0.3826$ ).

$T_5$ :

$$T_5 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega)^2}$$

Aantal punten is 2 (bij  $16\omega^4 - 20\omega^2 + 5 = 0$ ,  $\omega = 0.9511$  en  $\omega = 0.5878$ ).

Vraag 4:

In paragraaf 6.1 staat een tabel: "Butterworth polynomials" Wat is de relatie tussen deze tabel en paragraaf 2.1: "de Butterworth benadering"?

Antwoord:

Voor de Butterworth benadering volgt voor orde 1:

$$H_1(s) = \frac{1}{1+s}$$

De noemer van deze overdrachtsfunctie wordt het 1<sup>e</sup> orde Butterworth polynoom genoemd.

Uit de tabel volgt als voorbeeld van de 3<sup>e</sup> orde Butterworth benadering:

$$H_3(s) = \frac{1}{1+2s+2s^2+s^3}$$

Een nadeel van deze tabel is dat het noemerpolynoom niet in een eerste en een tweede orde deel is gesplitst. Dit nadeel geldt natuurlijk ook voor de hogere orde polynomen in de tabel.

Vraag 5:

Wat is de relatie tussen de tabel: "Chebyshev polynomials" in paragraaf 6.1 en paragraaf 2.2: "Chebyshev benadering"?

Antwoord:

In paragraaf 2.2 worden de Chebyshev polynomen van orde 1 tot en met 5 gegeven. De tabel in par. 6.1 geeft dezelfde polynomen van orde 1 t.e.m. 10.

Vraag 6:

Op de eerste pagina van par. 6.1, rechtsonder, wordt aangegeven hoe we de grafieken van de volgende pagina's in par. 6.1 kunnen gebruiken.

- Ik wil een Butterworth filter met  $A_{max} = 0.1 \text{ db}$  en  $A_{min} \geq 40 \text{ db}$  bij  $\omega = 2$ . Welke orde heb ik nodig?

Antwoord:

Uit de grafiek volgt:  $n = 10$ .

- Ik heb een Butterworth laagdoorlaatfilter van orde  $n=6$  en  $A_{max} = 0.1 \text{ db}$ . Welke demping heb ik bij  $\omega = 3.5$ ?

Antwoord:

Uit de grafiek volgt:  $A_{min} \approx 49 \text{ db}$ .

Vraag 7:

We willen hier even stilstaan bij de tabellen op de paginas 123 - 150 .

Deze paginas bevatten gegevens over Chebyshev rationale funktie filters van orde  $n=3, 4, 5, 6$  en  $7$ . In feite worden de polen en nulpunten gegeven van de overdrachtsfuncties voor verschillende  $A_{min}$  en  $A_{max}$  bij elke orde. Ook worden de de netwerkelementen gegeven die bij laddernetwerken horen die de overdrachtsfuncties realiseren.

We beperken ons hier tot de overdrachtsfuncties.

Concentreren we ons op de paginas 123 - 126.

Deze paginas hebben betrekking op  $n=3$ . Pagina 123 gaat over  $n=3$  en  $\rho = 15\%$ .

Deze  $\rho = 15\%$  komt overeen met een bepaalde  $A_{max}$ . Welke dat is vinden we in de tabel linksonder op pagina 119. De meest linkse kolom is  $\rho$  in  $\%$ . De middelste kolom is  $A_{max}$  in db.

$\rho = 15\% : A_{max} = 0.098$  db.

$\rho = 20\% : A_{max} = 0.18$  db.

$\rho = 25\% : A_{max} = 0.28$  db.

$\rho = 50\% : A_{max} = 1.25$  db.

De tabellen op paginas 123 - 150 hebben elk de grootheid  $\theta$  als parameter. Bij  $n=3$  en  $\rho = 15\%$  en oplopende  $\theta$  wordt de daarbij horende filteroverdrachtsfunctie steeds selektiever, ( $\Omega_s$  wordt steeds kleiner en nadert 1) en de  $A_{min}$  wordt ook steeds kleiner.



**Voorbeeld:**

$n=3$ ,  $\rho = 50\%$ ,  $\theta = 25$  (pagina 126)

De filterkarakteristiek die hier bij hoort (in db) is:

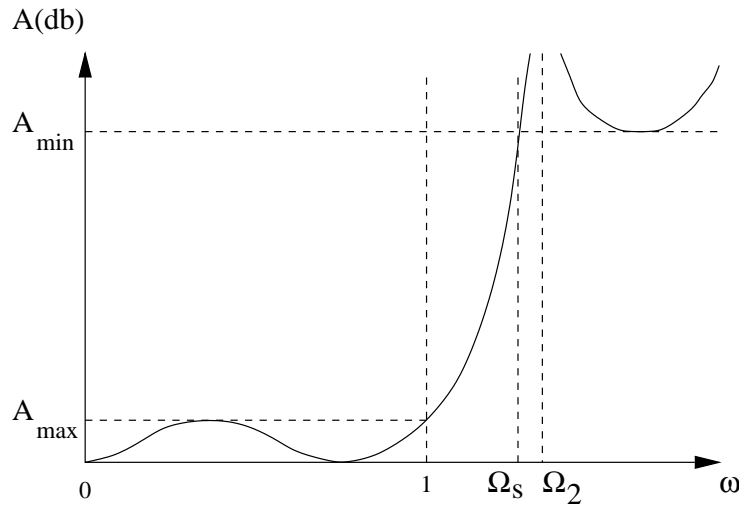


Figure 2.23:

$$A_{max} = 1.25 \text{ db } (\rho = 50\%).$$

$$A_{min} = 40.5 \text{ db.}$$

$$\Omega_s = 2.3662.$$

$$\Omega_2 = 2.6999 \text{ (dempingspool)}$$

De overdrachtsfunctie  $H(s)$ :

$$H(s) = \frac{(s^2 + \Omega_2)^2}{(s + \sigma_0)(s + \sigma_1 + j\Omega_1)(s + \sigma_1 - j\Omega_1)}$$

**Vraag 8:**

Wat stellen alle tabellen in par. 6.2 voor?

**Antwoord:**

De tabellen geven overdrachtsfuncties van de orde  $n = 2$  t.e.m. 9 en van de verschillende karakteristieken:

1. Butterworth (B)
2. Chebyshev (T)
3. Inverted Chebyshev (I)
4. Cauer (Cheb. rat. fie.) (C).

**Voorbeeld:** Bovenaan op pag. 152 : B 02 (Butterworth  $2^e$  orde).

Gegeven worden de tweede orde dempingskarakteristiek en de nulpunten van  $H(s)$ .

**Belangrijk:** In deze tabellen wordt  $H(s)$  genoemd wat wij  $\frac{1}{H(s)}$  noemen!

Hierbij hoort de tabel bovenaan op pagina 153,  $\rho = 50\%$  ( $A_{max} = 1.25$  db).

$$H(s) = \frac{1}{C(s^2 - 2a_1s + a_1^2 + b_1^2)} = \frac{1}{0.57735(s^2 + 1.8612s + 1.732)}$$

**Let op:**

Omdat  $H(s)|_{s=0} = 1$  is C zodanig gekozen dat daaraan wordt voldaan.

**Vraag 9:**

Wat stellen de tabellen in par. 6.3 voor?

**Antwoord:**

In deze paragraaf vinden we de elementwaarden van Butterworth en Chebyshev ladders voor enkele ordes  $n$ .

## 2.11 Een paar filtervoorbeelden

Hierna volgen enkele filtervoorbeelden ter verduidelijking van de tabellen in hoofdstuk 6.

Vooralsnog beperken we ons tot oneven filterorde en slaan we de "Inverted Chebyshev karakteristiek" over.

### Voorbeeld 1:

pag. 157 bovenste tabel:

$\rho = 50 \%$ ,  $C = 0.57735027$ ,  $a_0 = 1.2009369490$ ,

$a_1 = 0.6004684745$ ,  $b_1 = 1.0400419062$ .

Hieruit volgt de derde orde Butterworth overdrachtsfunctie:

$$H(s) = \frac{1}{C(s + a_0)(s^2 + 2a_1s + a_1^2 + b_1^2)}$$

C is zodanig gekozen dat  $|H(s)|_{s=0} = 1$ .

De polen van  $H(s)$  zijn dus direct bekend.

De dempingskarakteristiek: (zie pag. 156 bovenaan)

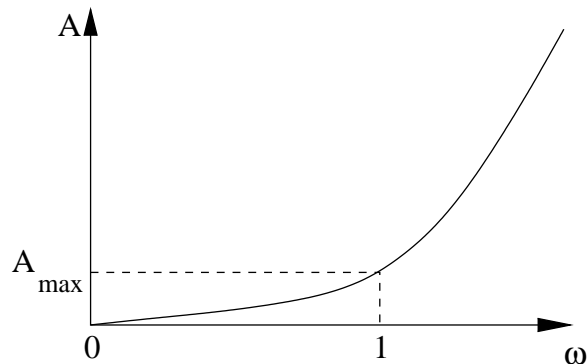


Figure 2.24:

Voor  $\rho = 50 \%$  volgt uit de tabel onderaan op pag. 119:

$\rho = 50 \%$   $\rightarrow A_{max} = 1.25$  db.

d.w.z.:  $-10 \log |H(j\omega)|_{\omega=1}^2 = 1.25$  db  $\rightarrow |H|_{\omega=1}^2 = 0.7499$ .

**Voorbeeld 2:**

Pagina 157, tabel midden: keuze voor  $\rho = 50 \%$ ,  
daar vinden we de derde orde overdrachtsfunctie:

$$H(s) = \frac{1}{C(s + a_0)(s^2 + 2a_1s + a_1^2 + b_1^2)}$$

met:

$C = 2.3094011$ ,  $a_0 = 0.4532218472$ ,  $a_1 = 0.2266109236$ ,  $b_1 = 0.9508194004$

C is weer zo gekozen dat  $H(s)|_{s=0} = 1$ .

Verder volgt:

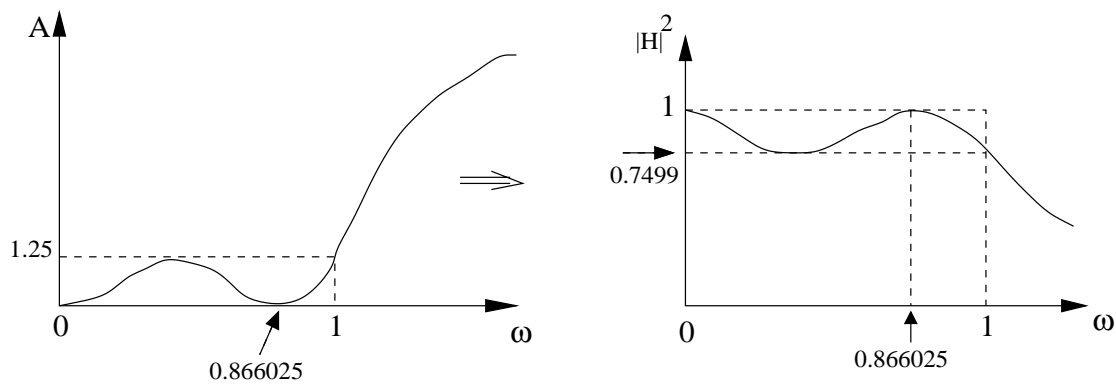


Figure 2.25:

**Voorbeeld 3:**

Pagina 160 bovenste tabel voor  $\rho = 50 \%$  en  $A_{min} = 40.5 \text{ db}$ .

Hieruit vinden we de derde orde Caer overdrachtsfunctie:

$$H(s) = \frac{(s^2 + 2.6998758817^2)}{C(s + a_0)(s^2 + a_1s + a_1^2 + b_1^2)}$$

$C = 15.65801$ ,  $a_0 = 0.4806933238$ ,  $a_1=0.2084141239$ ,  $b_1=0.9617829016$ .

C is weer zodanig gekozen dat  $H(s)|_{s=0} = 1$ .

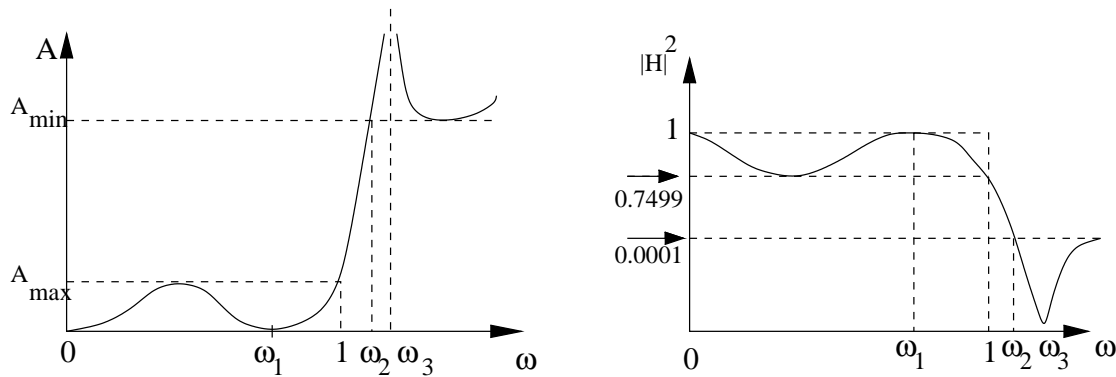


Figure 2.26:

$A_{max} = 1.25 \text{ db}$ ,  $A_{min} = 40.5 \text{ db}$ .

$-10\log|H|^2 = 40.5 \rightarrow |H|^2 = 0.0001$ .

$\omega_1 = 0.876411$ ,  $\omega_2 = 2.36620$ ,  $\omega_3 = 2.6998758$ .

**Voorbeeld 4:**

Pagina 172 bovenste tabel:  $\rho = 25\%$ ,  $A_{min}(\text{db}) = 40.19$  db.

Hier vinden we de vijfde orde Causer overdrachtsfunctie:

$$H(s) = \frac{(s^2 + 1.369345^2)(s^2 + 1.988128^2)}{C(s + a_0)(s^2 + 2a_1s + a_1^2 + b_1^2)(s^2 + 2a_2s + a_2^2 + b_2^2)}$$

en:

$C = 18.8427$ ,  $a_0 = 0.5401047$ ,  $a_1 = 0.3241048$ ,  $a_2 = 0.0538607$ ,

$b_1 = 0.761751$ ,  $b_2 = 0.992523$ .

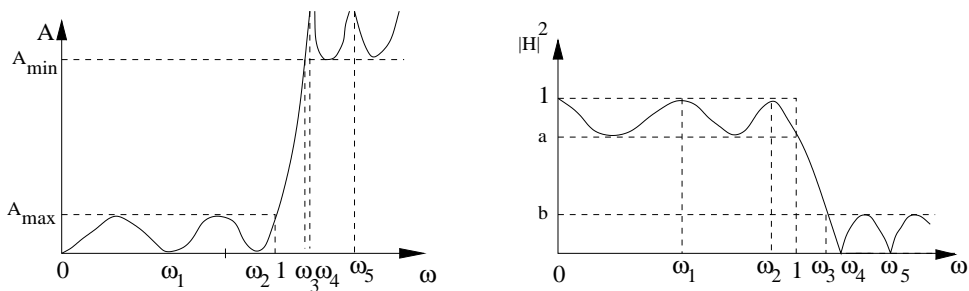


Figure 2.27:

$\omega_1 = 0.66646$ ,  $\omega_2 = 0.967626$ ,  $\omega_3 = 1.325$ ,

$\omega_4 = 1.3693$ ,  $\omega_5 = 1.988128$ .

$A_{max} \rightarrow \rho = 25\% \rightarrow A_{max} = 0.28$  db.

a volgt uit:  $-10 \log a = 0.28$ ,  $a = 0.9376$ .

b volgt uit:  $-10 \log b = 40.19$ ,  $b = 0.0001$ .

**Voorbeeld 5:**

Pagina 187 middelste tabel:  $\rho = 25\%$ ,  $A_{min} = 40.56$  db.

Hier vinden we de zevende orde Cauer overdrachtsfunctie:

$$H(s) = \frac{(s^2 + 1.087958^2)(s^2 + 1.197165^2)(s^2 + 1.7847018^2)}{C(s + a_0)(s^2 + 2a_1s + a_1^2 + b_1^2)(s^2 + 2a_2s + a_2^2 + b_2^2)(s^2 + 2a_3s + a_3^2 + b_3^2)}$$

met:

$C = 21.762591$ ,  $a_0 = 0.48553$ ,  $a_1 = 0.298332$ ,  $a_2 = 0.099488$ ,  $a_3 = 0.0209467$ ,  $b_1 = 0.685952$ ,  
 $b_2 = 0.9431506$ ,  $b_3 = 1.0078089$ .

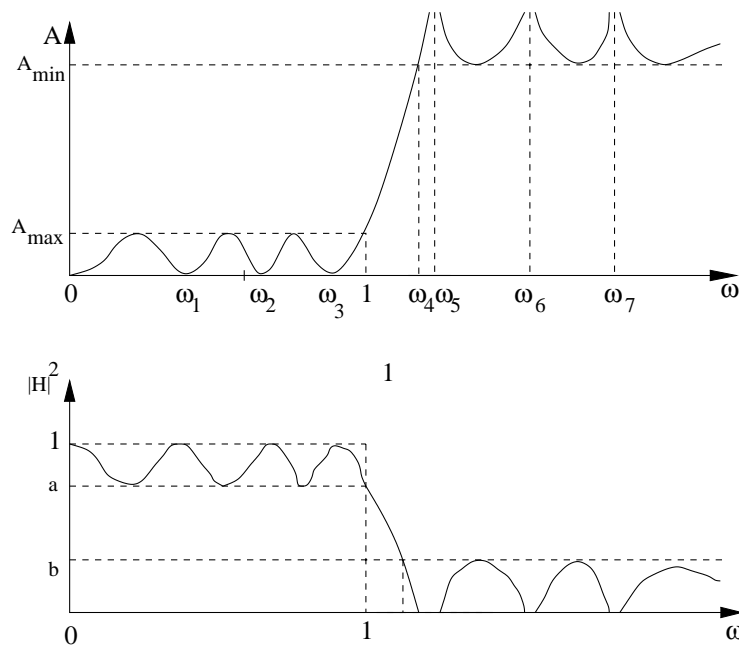


Figure 2.28:

$\omega_1 = 0.604322$ ,  $\omega_2 = 0.900907$ ,  $\omega_3 = 0.991338$ ,  
 $\omega_4 = 1.07853$ ,  $\omega_5 = 1.087958$ ,  $\omega_6 = 1.197165$ ,  $\omega_7 = 1.7847018$ .

a volgt uit:  $-10 \log a = 0.28$  db,  $a = 0.9376$ .

b volgt uit:  $-10 \log b = 40.56$  db,  $b = 0.0001$ .

**Voorbeeld 6:**

We nemen de overdrachtsfunctie van voorbeeld 3 en gaan een denormalisatie toepassen.

We willen nu dat de doorlaatband niet eindigt bij  $\omega = 1$ , maar bij  $\omega' = 2$ :

$$1 \rightarrow \frac{1}{2} \quad 2 \rightarrow (s \rightarrow \alpha s')$$

dus:  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

In de overdrachtsfunctie vervangen we dus overal  $s$  door  $\frac{1}{2}s$  en krijgen dan de nieuwe overdrachtsfunctie.

Hierbij hoort de karakteristiek:

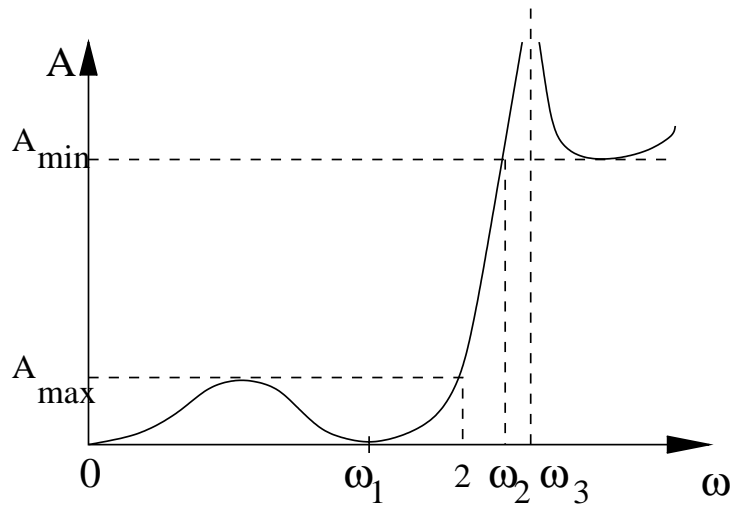


Figure 2.29:

$$\omega_1 = 2 \times 0.876411 = 1.7528$$

$$\omega_2 = 2 \times 2.36620 = 4.7324$$

$$\omega_3 = 2 \times 2.6998758 = 5.3998$$



**Voorbeeld 7:**

We gaan nu het voorbeeld 3 transformeren naar een hoogdoorlaat. Als we in  $H(s)$ :  $s$  vervangen door  $\frac{1}{s}$  wordt de karakteristiek:

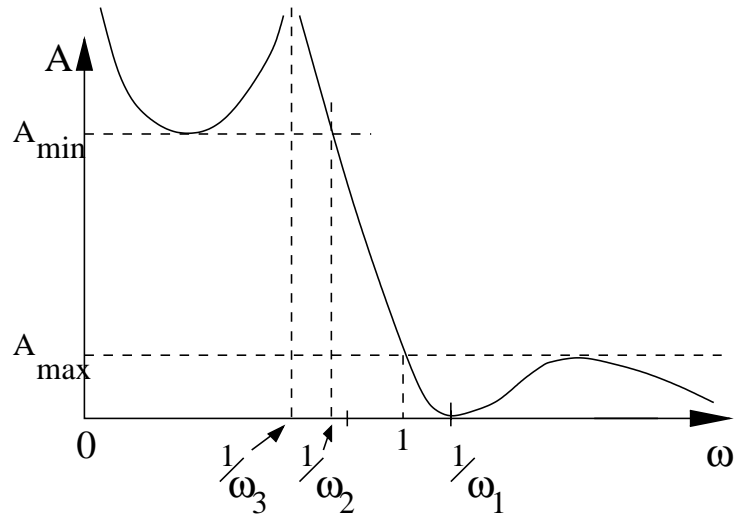


Figure 2.30:

Hierna kan desgewenst nog een denormalisatie plaatsvinden.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_1} &= \frac{1}{0.876411} = \mathbf{1.1410} \\ \frac{1}{\omega_2} &= \frac{1}{2.3662} = \mathbf{0.4226} \\ \frac{1}{\omega_3} &= \frac{1}{2.6998758} = \mathbf{0.3704}\end{aligned}$$

**Voorbeeld 8:**

We gaan nu een laagdoorlaat naar bandtransformatie toepassen op voorbeeld 3.

De transformatie wordt voor  $s = j\omega_1$ :

$$\omega_1 \rightarrow \frac{(\omega')^2 - a^2}{b\omega'} \quad \text{voor } \omega_1 = 0 \rightarrow (\omega')^2 = a^2$$

Dus de frekwentie 0 wordt de centrale frekwentie  $\underline{\omega' = a}$

Voor willekeurige  $\omega_1$ :

$$(\omega')^2 - b\omega_1\omega' - a^2 = 0 \text{ met 2 wortels: } \omega'_x \text{ en } \omega'_y.$$

waarvoor geldt:

$$\omega'_x\omega'_y = a^2 \text{ en: } \omega'_x + \omega'_y = -b\omega_1$$

Kiezen we nu eerst  $a = 1$  (de centrale frekwentie)

Kiezen we nu  $\omega_1 = 1$ : (de grens van de laagdoorlaatband)

en  $\omega_y = -2$  (de grootste wortel moet negatief zijn als  $b$  en  $\omega_1 > 0$ )

dan:

$$\omega'_x = 0.5 \text{ en } b = \frac{3}{2}.$$

Op deze wijze blijkt:  $b$  is de bandbreedte.

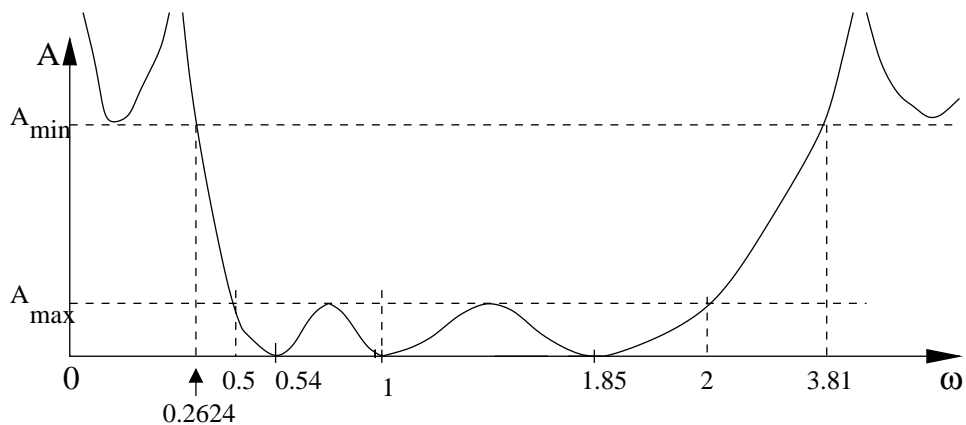


Figure 2.31:

De transformatie wordt dan:

$$s \rightarrow \frac{(s')^2 + 1}{\frac{3}{2}(s')}$$

$H'_{(s')}$  wordt dan:

$$H'_{(s')} = \frac{\left(\frac{(s')^2+1}{\frac{3}{2}(s')}\right)^2 + 2.69987^2}{C\left\{\left(\frac{(s')^2+1}{\frac{3}{2}(s')}\right) + a_0\right\}\left\{\left(\frac{(s')^2+1}{\frac{3}{2}(s')}\right)^2 + a_1\left(\frac{(s')^2+1}{\frac{3}{2}(s')}\right) + a_1^2 + b_1^2\right\}}$$

## Chapter 3

# Aktieve filters en filters met schakelende capaciteiten

### 3.1 De operationele versterker(op-amp)

Het actieve element wat we zullen gebruiken is de operationele versterker (op-amp) in de ideale vorm. Figuur 3.1 geeft het op-amp circuit.

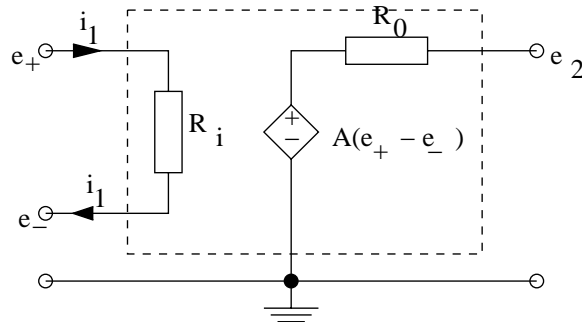


Figure 3.1: Equivalent circuit van een op-amp

De idealisering houdt in:

1.  $R_i \rightarrow 0$ ,
2.  $R_0 \rightarrow 0$ ,
3.  $A \rightarrow \infty$ .

En dit houdt in:  $i_1 = 0$  en  $e_+ = e_-$ .

In de praktijk zullen we een elektronisch geconstrueerde benadering van de ideale op-amp gebruiken die allerlei beperkingen met zich mee brengt zoals:

1. Hoge, maar wel eindige A,
2. Parasitaire eigenschappen zoals eindige bandbreedte en beperkte signaal-grootte.
3. Ruiseigenschappen.

We zullen in dit diktaat daarop verder niet ingaan en de ideale component gebruiken. Het betekent wel b.v. dat actieve filters voor hoge frequenties moeilijk ideaal te maken zullen zijn.

In de figuur 3.2 zijn enkele eenvoudige op-amp toepassingen gegeven.

Hieronder volgen de ingang - uitgangsrelaties van de verschillende deelfiguren van figuur 3.2.

figuur 3.2a:	$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{R_2}{R_1}$
figuur 3.2b:	$\frac{E_2}{E_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$
figuur 3.2c:	$\frac{E_2}{E_1} = 1$
figuur 3.2d:	$E_0 = -\left(\frac{R_0}{R_1}E_1 + \frac{R_0}{R_2}E_2 + \frac{R_0}{R_3}E_3\right)$
figuur 3.2e:	$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{1}{RCs}$
figuur 3.2f:	$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{1}{R_1} / \left(sC + \frac{1}{R_2}\right)$
figuur 3.2g:	$E_0 = -\frac{E_1}{R_1Cs} - \frac{E_2}{R_2Cs} - \frac{E_3}{R_3Cs}$
figuur 3.2h:	$E_0 = -\frac{R_0}{R_1}E_1 + \frac{R_3(R_0 + R_1)}{R_1(R_2 + R_3)}E_2$

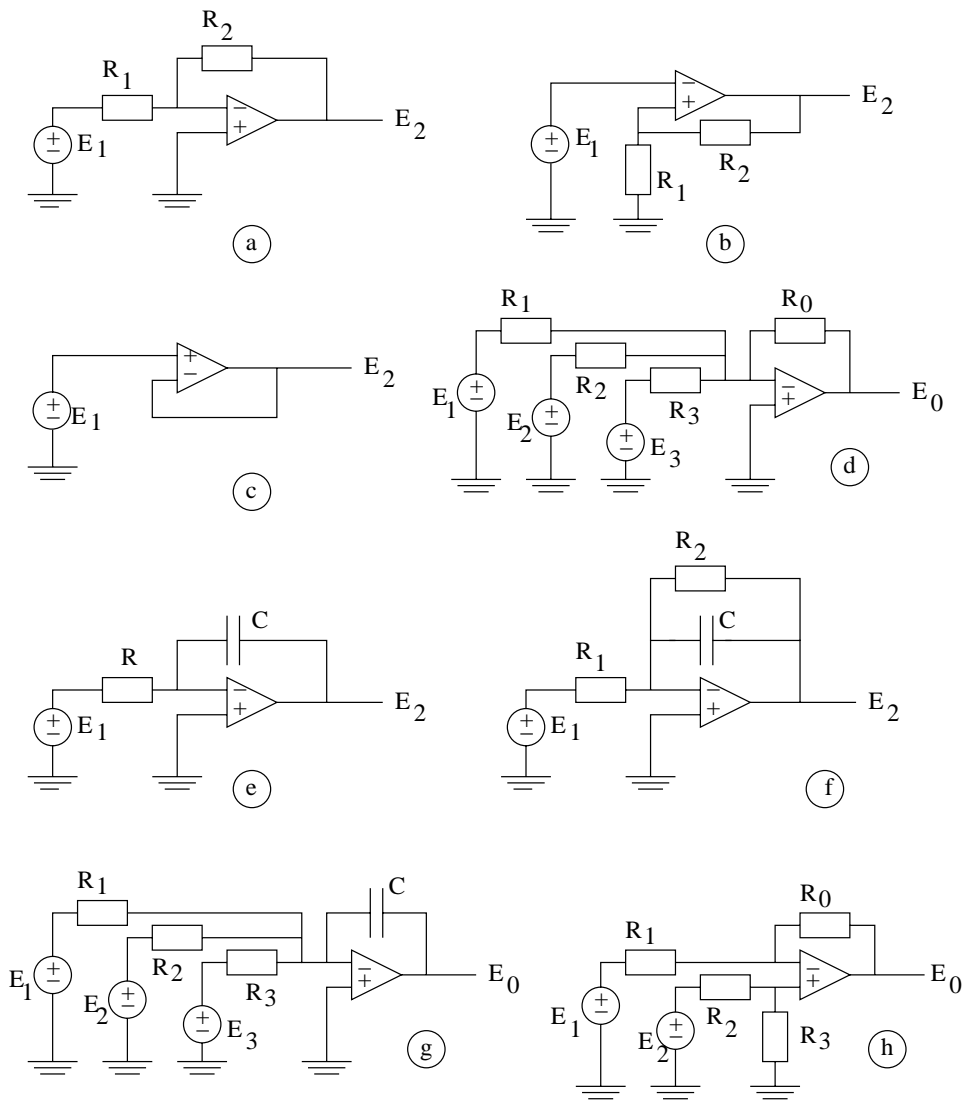


Figure 3.2: Verschillende op-amp toepassingen

### 3.2 Switched-capacitor principe

Het principe is gegeven in figuur 3.3.

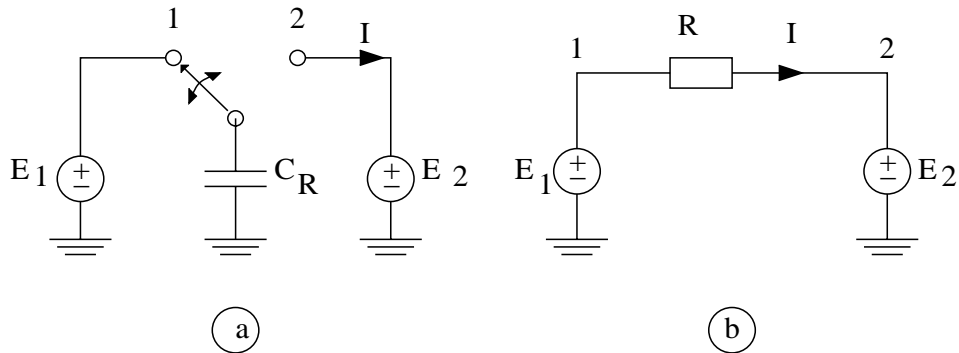


Figure 3.3: Nabootsing van een weerstand m.b.v. een geschakelde capaciteit

De capaciteit  $C_R$  wordt periodiek met 1 en 2 verbonden. Als  $C_R$  verbonden is met  $E_1$  wordt een lading opgenomen van  $C_R E_1$ . Bij de verbinding met  $E_2$  verandert deze lading in  $C_R E_2$ .

Als we aannemen dat  $E_1 > E_2$  dan wordt dus een lading  $C_R(E_1 - E_2)$  overgebracht van  $E_1$  naar  $E_2$ .

Als dit  $f_c$  keer gebeurt per seconde is dit dus een stroom  $I$  (gemiddeld) van:  $f_c \cdot C_R(E_1 - E_2)$ .

Hieruit volgt een weerstand (benaderde waarde) van:

$$R = \frac{E_1 - E_2}{I} = \frac{1}{f_c \cdot C_R}$$

Deze weerstand vinden we in figuur 3.3b.

De schakelaar wordt in de praktijk gerealiseerd met MOS transistoren geschakeld met 2 niet-overlappende kloksignalen  $\Phi_1$  en  $\Phi_2$ .

In de MOS technologie wordt de capaciteit  $C_R$  altijd vergezeld door parasitaire capaciteiten naar het substraat.

Om hier op in te spelen wordt figuur 3.3a in de praktijk vaak gerealiseerd in de vorm van figuur 3.4.

Als de schakelaars in de topositie staan ( $\Phi_1$  hoog) wordt  $C_R$  opgeladen tot:

$$C_R E_R = C_R(E_1 - E_2).$$

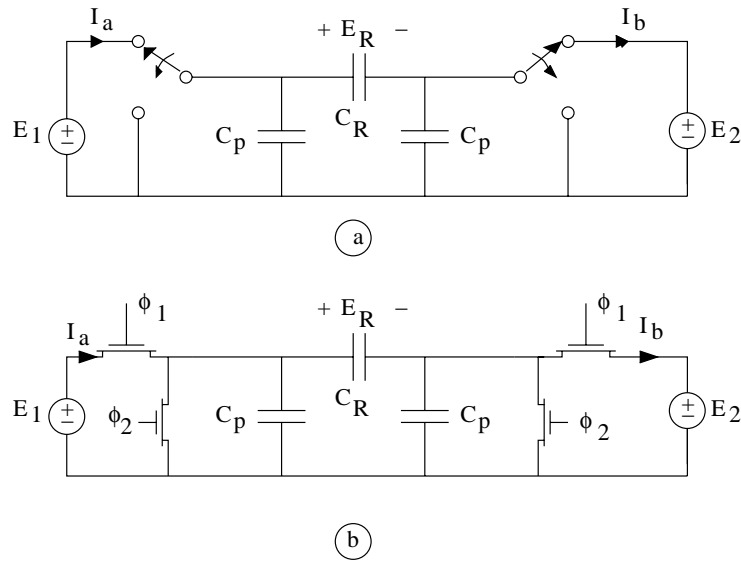


Figure 3.4: Een geschakelde capaciteit, ongevoelig voor de MOS parasitaire capaciteiten

**Tegelijkertijd wordt  $C_p$  opgeladen tot  $C_p E_1$  en  $C_b$  tot  $C_b E_2$ .**

**Als nu  $\Phi_2$  hoog wordt, worden alle capaciteiten ontladen.**

**De periodieke op/ontlading van  $C_R$  resulteert in de gemiddelde stroom:**

$$I_a = I_b = f_c \cdot C_R (E_1 - E_2).$$



In de paragraaf 3.1 hebben we een aantal circuits gegeven die gebruikt worden voor actieve filterschakelingen. Alle schakelingen die daar zijn gegeven en uitsluitend weerstanden bevatten, kunnen worden veranderd in schakelingen die uitsluitend capaciteiten bevatten (deze zijn beter te maken in MOS techniek). Hiertoe vervangen we elke weerstand  $R_i$  door een capaciteit  $C_i$  met  $C_i = 1/R_i$  Farad.

**VOORBEELDEN:**

- Figuur 3.2e wordt nu vertaald naar figuur 3.5a, met:

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{1}{\frac{1}{f_c C_1} \cdot C_2 s} = -f_c \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1}{s}.$$

- Figuur 3.2f gaat over in figuur 3.5b, met:

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{f_c \frac{C_1}{C_2}}{s + f_c \cdot \frac{C_3}{C_2}} = -\frac{f_c C_1}{s C_2 + f_c C_3}.$$

- Figuur 3.2g gaat over in figuur 3.5c, met:

$$E_0 = -f_c \cdot \frac{C_1}{C_0} \cdot \frac{1}{s} \cdot E_1 - f_c \cdot \frac{C_2}{C_0} \cdot \frac{1}{s} \cdot E_2 - f_c \cdot \frac{C_3}{C_0} \cdot \frac{1}{s} \cdot E_3.$$

- Een schakeling die 2 signalen sommeert en een derde integreert, is getekend in figuur 3.6b met:

$$E_0 = -\frac{C_1}{C_0} E_1 - \frac{C_2}{C_0} E_2 - f_c \frac{C_3}{C_0} \cdot \frac{1}{s} E_3.$$

- Het integreren van het verschil van 2 signalen is mogelijk met figuur 3.6c, waarin:

$$E_0 = -f_c \cdot \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1}{s} (E_1 - E_2).$$

- Het integreren (met verlies) van het verschil van 2 signalen is mogelijk met figuur 3.6d, waarin geldt:

$$E_0 = -\frac{f_c \cdot \frac{C_1}{C_2}}{s + f_c \cdot \frac{C_3}{C_2}} (E_1 - E_2).$$

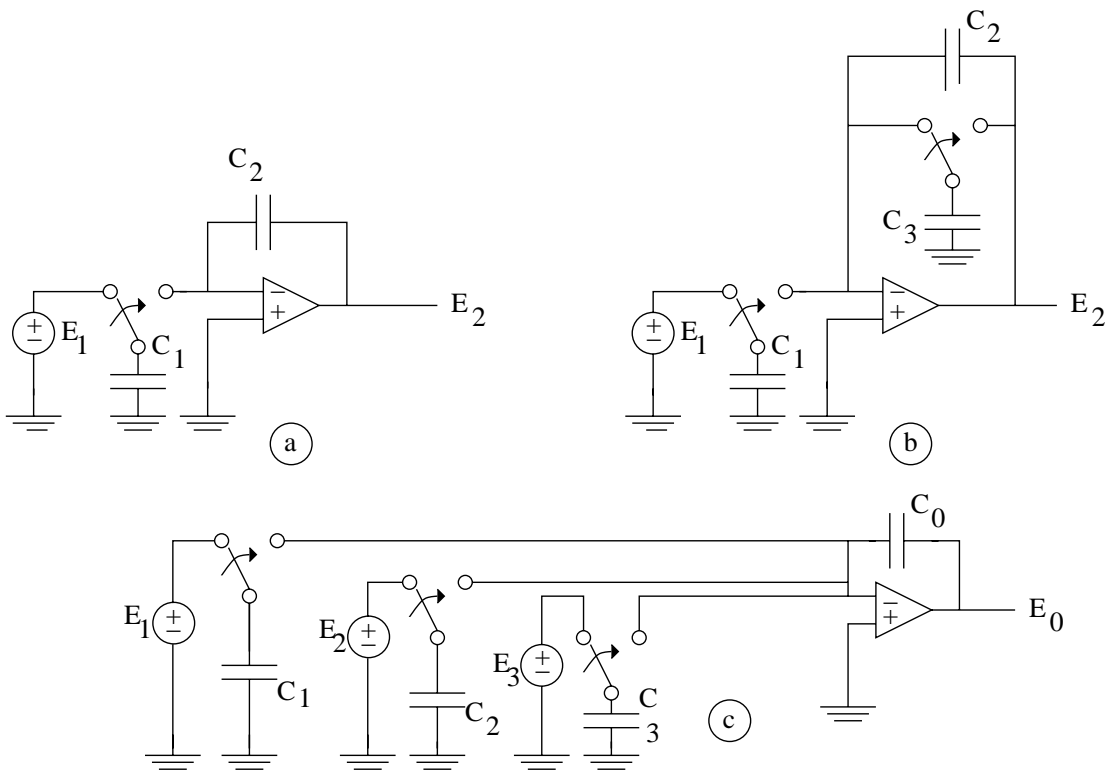


Figure 3.5:

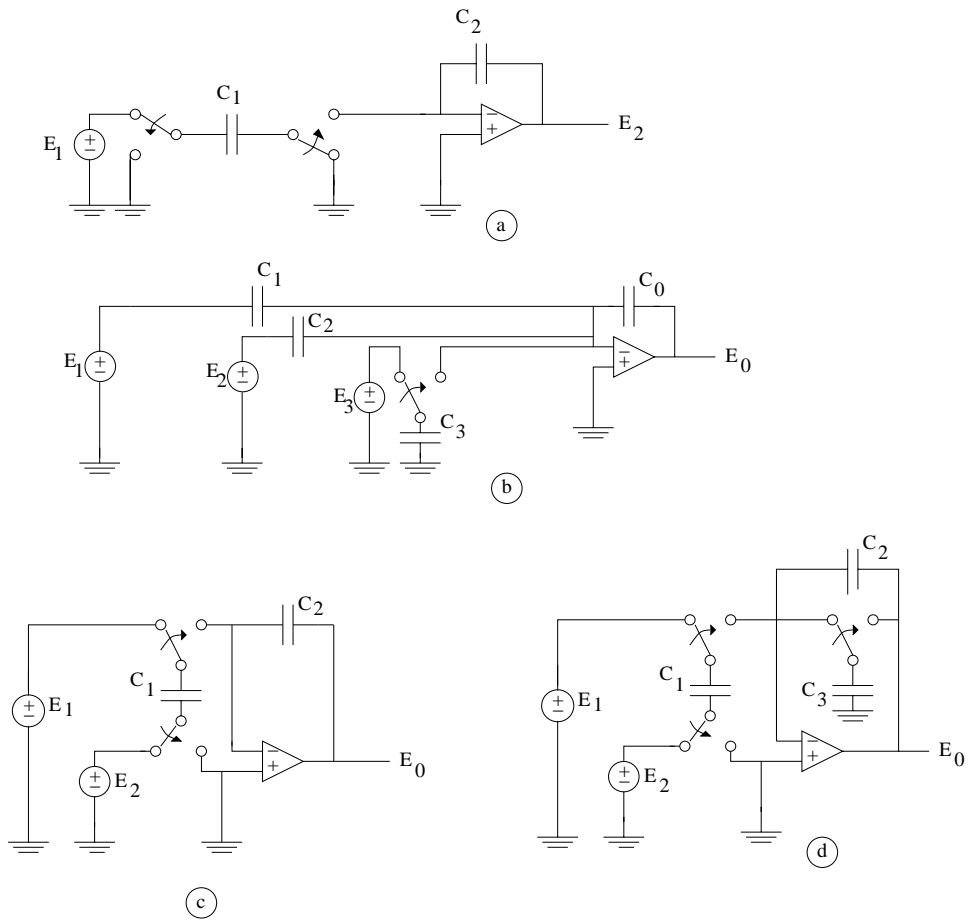


Figure 3.6:

### 3.3 Eerste orde secties.

De uitdrukking voor de inverterende eerste orde sectie is:

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{a_1 s + a_0}{s + b_0}$$

Als we de 2 weerstanden in figuur 3.2a vervangen door 2 impedanties ontstaat hiervoor figuur 3.7a en b.

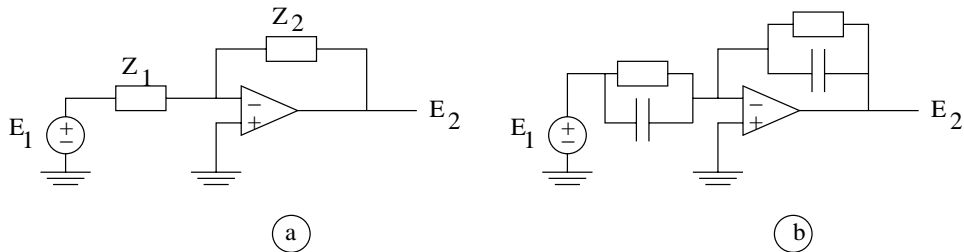


Figure 3.7: Algemene inverterende eerste orde sectie

Als een niet-inverterende sectie gewenst wordt kunnen we hiervoor figuur 3.2b als uitgangspunt nemen. Dit levert figuur 3.8c en d op (voor  $a_1 > 1$  en  $a_0 > b_0$ ).

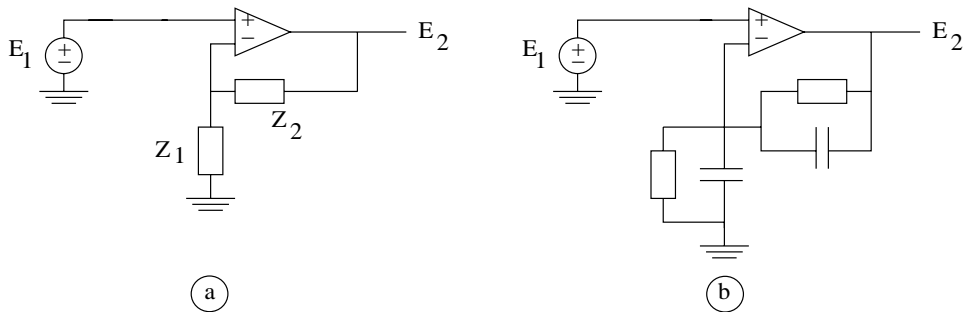


Figure 3.8: Algemene niet-inverterende eerste orde sectie

De switched-capacitor versie van figuur 3.7b wordt figuur 3.9, waarin:

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{C_1 s + f_c \cdot C_3}{C_2 s + f_c \cdot C_4}$$

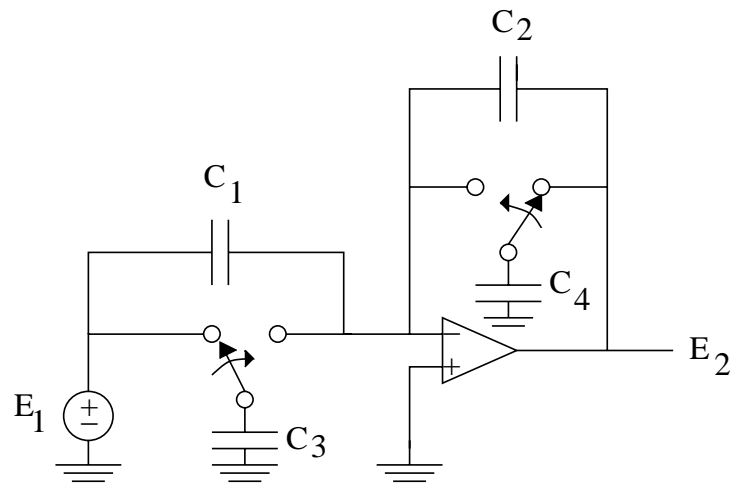


Figure 3.9: Een invertierende eerste orde sectie

### De RC-CR transformatie.

De normale frekwentie transformaties zijn hier, waar we te maken hebben met RC-actieve netwerken, onbruikbaar. Transformaties zouden bijvoorbeeld zelfinducties kunnen gaan opleveren die we hier juist willen vermijden.

Toch is er een transformatie beschikbaar: de RC-CR transformatie.

Deze is alleen toepasbaar op een netwerk dat bestaat uit weerstanden, capaciteiten en dimensieloos gestuurde bronnen (spanningsgestuurde spanningsbronnen en stroomgestuurde stroombronnen).

### De transformatie luidt:

Als in een netwerk N alle geleidingen  $G_i$  (in mho) vervangen worden door een capaciteit van  $G_i$  farad en elke capaciteit van  $C_j$  farad in netwerk N vervangen wordt door een geleiding  $C_j$  (in mho) dan ontstaat een netwerk  $N'$  met de relaterende eigenschappen:

1. Impedantiefunkties:  $Z'(s) = \frac{1}{s}Z\left(\frac{1}{s}\right)$
2. Admittantiefunkties:  $Y'(s) = sY\left(\frac{1}{s}\right)$
3. Dimensieloze funkties:  $H'(s) = H\left(\frac{1}{s}\right)$

### Voorbeeld:

De figuren 3.10a en b:

Voor figuur 3.10 kunnen we uitrekenen:

$$H(s) = \frac{E_2}{E_1} = \frac{12}{2s^2 + 7s + 6}$$

$$Z_{11}(s) = \frac{E_1}{I_1} = \frac{2s^2 + 7s + 6}{s(2s + 1)}$$

Figuur 3.10b is afkomstig uit 3.10a m.b.v. de RC-CR transformatie.

Er geldt voor 3.10b:

$$H'(s) = \frac{E'_2}{E'_1} = \frac{12s^2}{6s^2 + 7s + 2}$$

$$Z'_{11}(s) = \frac{E'_1}{I'_1} = \frac{6s^2 + 7s + 2}{s(s + 2)}$$

**NAGAAN!**

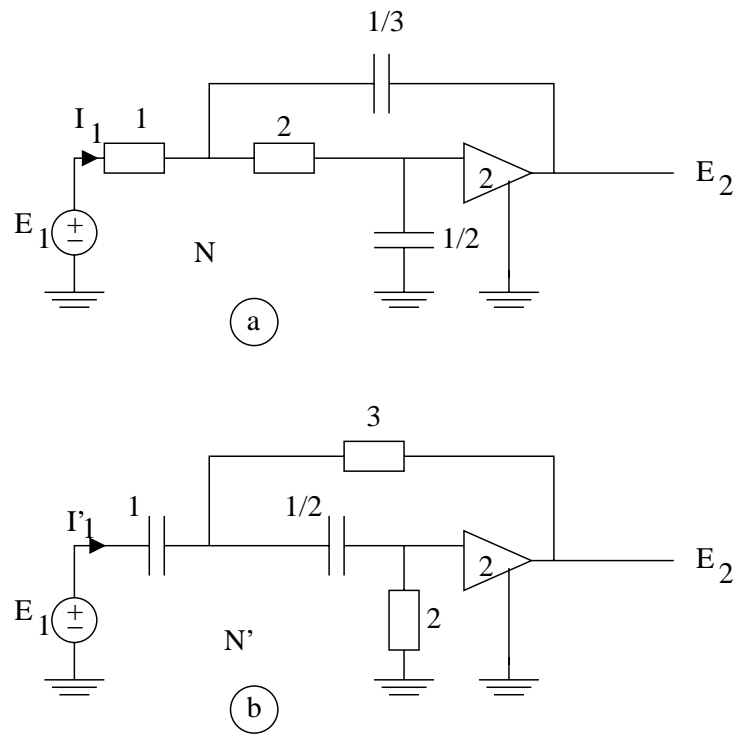


Figure 3.10: Voorbeeld van een RC - CR transformatie

### 3.4 Tweede orde secties

#### Sallen-Key secties.

De Sallen-Key laagdoorlaat sectie is gegeven in figuur 3.11.

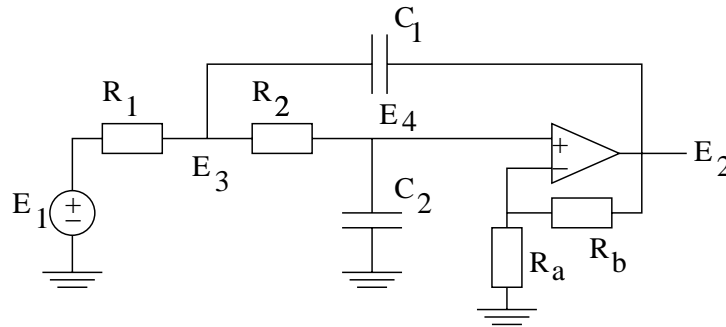


Figure 3.11: De Sallen-Key laagdoorlaat

Hiervoor kunnen we uitrekenen:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{\mu}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_2} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

met:

$$\mu = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$

We zullen de volgende notaties gebruiken:

$$H_{LP}(s) = \frac{G\omega_0^2}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2} \quad \text{met:}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}, \quad Q = \frac{1}{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_2}}, \quad G = \mu$$

Het aantal vrijheidsgraden laat ons toe enkele mogelijke keuzes te maken.

#### Mogelijkheid 1:



$$C_1 = C_2 = 1F, \quad R_1 = R_2 = R$$

$$\text{dan wordt: } R = \frac{1}{\omega_0} \quad \text{en: } \mu = 3 - \frac{1}{Q}$$

**Mogelijkheid 2:**

$$C_1 = C_2 = 1F, \quad R_a = R_b = R$$

$$\text{dan wordt: } R_1 = \frac{Q}{\omega_0} \quad \text{en: } R_2 = \frac{1}{\omega_0 Q}$$

**Mogelijkheid 3:**

$$C_1 = \sqrt{3} Q \quad C_2 = 1F \quad \mu = \frac{4}{3}$$

$$\text{dan: } R_1 = \frac{1}{\omega_0 Q} \quad \text{en: } R_2 = \frac{1}{\sqrt{3} \omega_0}$$

**Mogelijkheid 4:**

$$\mu = 1, \quad R_1 = R_2 = 1\Omega$$

$$\text{dan: } C_1 = \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{en: } C_2 = \frac{1}{2Q\omega_0}$$

**Voorbeeld:**

Ontwerp van een vierde orde Butterworth low-pass m.b.v. Sallen-Key, gebruik mogelijkheid 1 en 2 voor de 2 secties:

stel  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^3$  en gebruik  $0.1\mu F$  capaciteiten.

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{G_1}{s^2 + 0.765367s + 1} \cdot \frac{G_2}{s^2 + 1.847759s + 1}$$

(getallen komen uit een tabel).

Mogelijkheid 1: voor de eerste sectie:

$$C_1 = C_2 = 1F, \quad R_1 = R_2 = 1\Omega, \quad \mu = 3 - (1/Q) = 2.23463 = 1 + (R_b/R_a)$$

We kiezen b.v.:  $R_1 + R_2 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}$   
(dezelfde offset aan beide op-amp klemmen)

Dit levert:  $R_a = 3.61991\Omega$ ,  $R_b = 4.46926\Omega$

Mogelijkheid 2: voor de tweede sectie:

$$C_1 = C_2 = 1F, \quad R_1 = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{1}{b_1} = 0.541199\Omega \quad R_2 = \frac{1}{Q\omega_0} = 1.84775\Omega$$

Opnieuw kiezen we:  $R_A // R_B = R_1 + R_2 \Rightarrow R_A = R_B = 4.77787\Omega$

Denormalisatie: eerst schaling van de elementen met  $k_f = 2\pi \cdot 10^3$

Dit levert capaciteiten op van  $159.154\mu F$ . Omdat we  $0.1\mu F$  capaciteiten willen, gebruiken we een impedantie- schaalfactor van:

$$k_z = 159.154/0.1 = 1591.54$$

Het filter is gegeven in figuur 3.12.

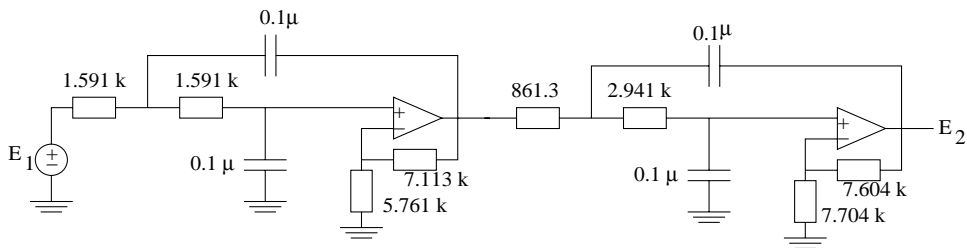


Figure 3.12: Een vierde orde Butterworth laagdoorlaat met Sallen-Key

Een Sallen-Key hoogdoorlaat is gegeven in figuur 3.13a.

Hiervoor geldt:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\mu s^2}{s^2 + \left( \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_1 C_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

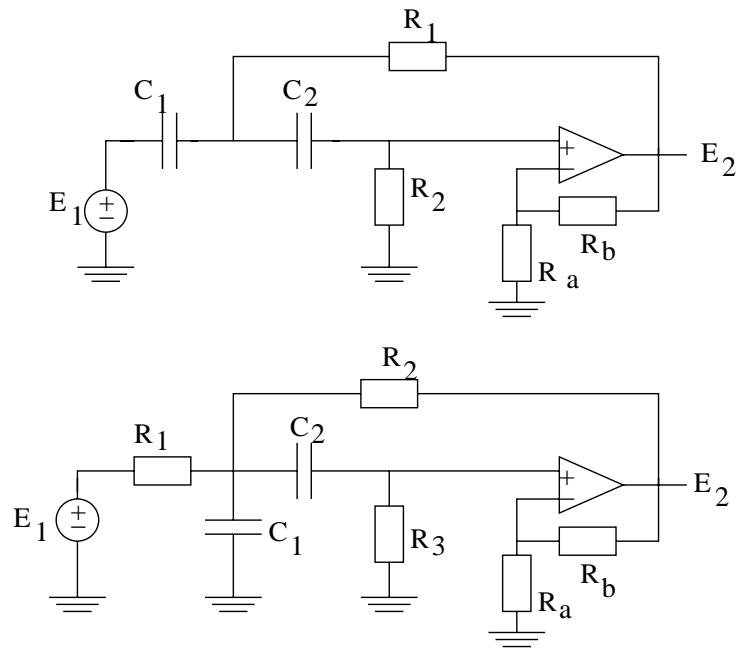


Figure 3.13: De Sallen-Key hoogdoorlaat en de Sallen-Key banddoorlaat

Gebruiken we de schrijfwijze:

$$H_{HP}(s) = \frac{Gs^2}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2}$$

dan krijgen we:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}, \quad Q = \frac{1}{\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_1 C_1}}$$

Ook hier hebben we weer keuze mogelijkheden.

Kiezen we b.v.  $C_1 = C_2 = 1F$  dan wordt:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = b_0 \quad \frac{2}{R_2} + \frac{1-\mu}{R_1} = b_1$$

Hieruit volgt voor  $R_1$  en  $R_2$ :

$$R_2 = \frac{\sqrt{8b_0(\mu - 1) + b_1^2} - b_1}{2(\mu - 1)b_0} \quad R_1 = \frac{1}{b_0 R_2}$$

Een Sallen-Key banddoorlaat is gegeven in figuur 3.13b.

Hiervoor geldt:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{\mu}{R_1 C_1} \cdot s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_1}\right)s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Schrijfwijze:

$$H_{BP}(s) = \frac{G\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2}$$

dan:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad Q = \frac{\sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}}{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_1}}$$

en:

$$G = \frac{\frac{\mu}{R_1 C_1}}{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_1}}$$

Opnieuw hebben we een grote keuze vrijheid.

Kies b.v:

$$C_1 = C_2 = 1F \quad R_1 = R_2 = R_3 = R$$

De Multiple-Feedback (MFB) secties.

De laagdoorlaat versie is gegeven in figuur 3.14a.

Hiervoor geldt:

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{\frac{1}{R_1 R_3 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

(inverterend!)

In de schrijfwijze

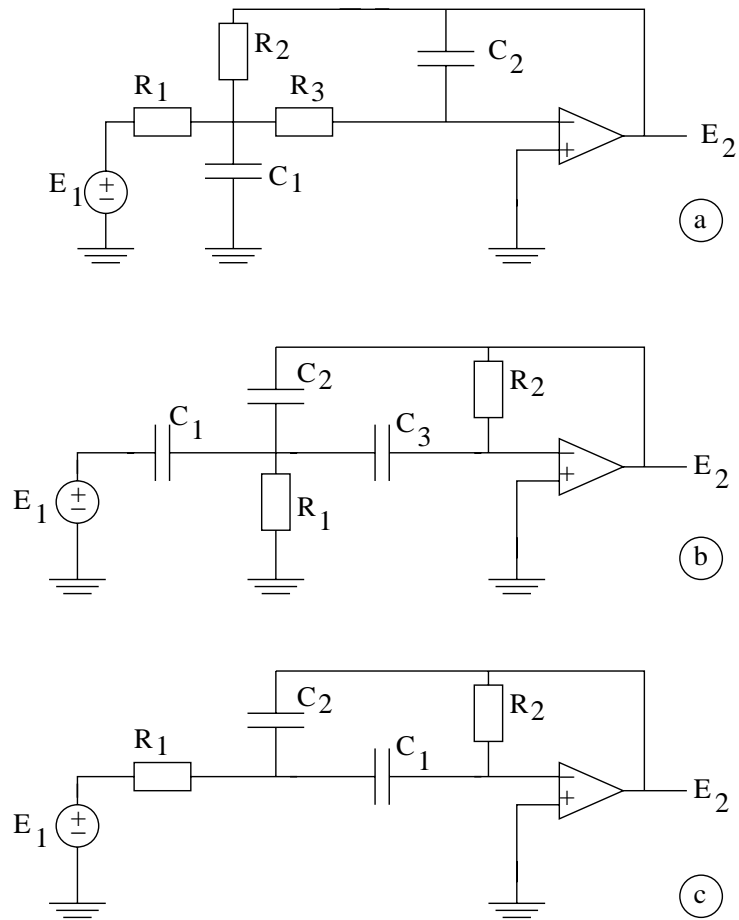


Figure 3.14: De MFB laag-, hoog- en banddoorlaat

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{Gb_0}{s^2 + b_1s + b_0} = -\frac{G\omega_0^2}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2}$$

wordt dan:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad G = \frac{R_2}{R_1}$$

en:

$$Q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{R_2 R_3}}{R_1} + \sqrt{\frac{R_3}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_3}}}$$

Met 5 elementen en 3 vergelijkingen is weer een grote keus.

kies voor gemak  $C_1 = 1 \text{ F}$  dan wordt:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = b_1, \quad \frac{1}{R_1 R_2 C_2} = b_0 \quad \text{en} \quad \frac{R_2}{R_1} = G.$$

Voorbeeld:

Ontwerp een sectie met  $G = 5$ ,  $b_1 = 1.2$  en  $b_0 = 1$ .

Met  $C_1 = 1 \text{ F}$ , kiezen we  $C_2 = 0.05 \text{ F}$ . Dan wordt:

$$R_1 = 1.4202 \, \Omega, \quad R_2 = 7.1010 \, \Omega, \quad R_3 = 2.8165 \, \Omega.$$

De MFB hoogdoorlaat versie is gegeven in figuur 3.14b.  
Hiervoor geldt:

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{\frac{C_1}{C_2} s^2}{s^2 + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{R_2 C_2 C_3} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_3}}$$

Als we in een ontwerp  $C_1 = C_3 = 1 \text{ F}$  kiezen dan worden:

$$C_2 = \frac{1}{G}, \quad R_1 = \frac{G b_1}{(2G + 1) b_0}, \quad R_2 = \frac{2G + 1}{b_1}$$

De MFB banddoorlaat versie is figuur 3.14c.

Hiervoor geldt:

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{\frac{1}{R_1 C_2} \cdot s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}\right)s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}, \quad G = \frac{R_2 C_1}{R_1 (C_1 + C_2)}$$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}}$$

De Q wordt maximaal als  $C_1 = C_2$ .

Als we dus kiezen:  $C_1 = C_2 = 1F$  dan wordt  $Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$   
(voor hoge Q is dus  $R_2 \gg R_1$ ).

Verder:

$$R_1 = \frac{b_1}{2b_0} = \frac{1}{2\omega_0 Q}, \quad R_2 = \frac{2}{b_1} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

$$G = \frac{R_2}{2R_1} = \frac{2b_0}{b_1^2} = 2Q^2.$$

## Two-integrator secties

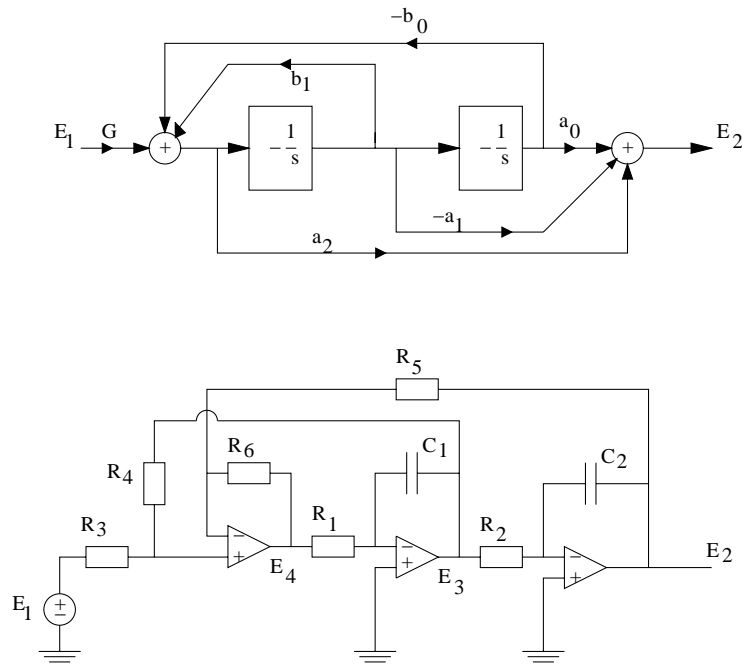


Figure 3.15:

Deze secties zijn gebaseerd op de schakeling van figuur 3.15a. Hierbij is:

$$\frac{E_2}{E_1} = G \cdot \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$

De eerste versie is de KHN-sectie van figuur 3.15b.  
(Kerwin - Huelsman - Newcomb)

Hiervoor geldt:

$$E_2 = -\frac{1}{s R_2 C_2} E_3 \quad E_3 = -\frac{1}{s R_1 C_1} E_4.$$

(voor de beide integrator secties).



Bovendien voor de optelling:

$$E_4 = \frac{R_4(R_5 + R_6)}{R_5(R_3 + R_4)}E_1 - \frac{R_6}{R_5}E_2 + \frac{R_3(R_5 + R_6)}{R_5(R_3 + R_4)}E_3.$$

Dit levert:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{R_4}{R_5} \cdot \frac{R_5+R_6}{R_3+R_4} \cdot \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{R_3}{R_5} \cdot \frac{R_5+R_6}{R_3+R_4} \cdot \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

met:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad G = \frac{R_4}{R_6} \cdot \frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4}$$

en:

$$Q = \frac{R_5}{R_3} \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_5 + R_6} \sqrt{\frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}}$$

De tijdsconstanten  $R_1 C_1$  en  $R_2 C_2$  kunnen onafhankelijk worden gekozen.

Dan volgt:

$$\frac{R_6}{R_5} = \omega_0^2 R_1 R_2 C_1 C_2, \quad \frac{R_4}{R_3} = \frac{Q(1 + \frac{R_6}{R_5})}{\sqrt{\frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}}} - 1$$

Zoals kan worden nagegaan is  $\frac{E_3}{E_1}$  een inverterende tweede orde banddoorlaat.

$\frac{E_4}{E_1}$  is een niet-inverterende tweede orde hoogdoorlaat.

Door  $E_2$ ,  $E_3$  en  $E_4$  op de juiste wijze op te tellen maken we de schakeling van figuur 3.15a volledig.

Figuur 3.16 wordt dan de complete schakeling.

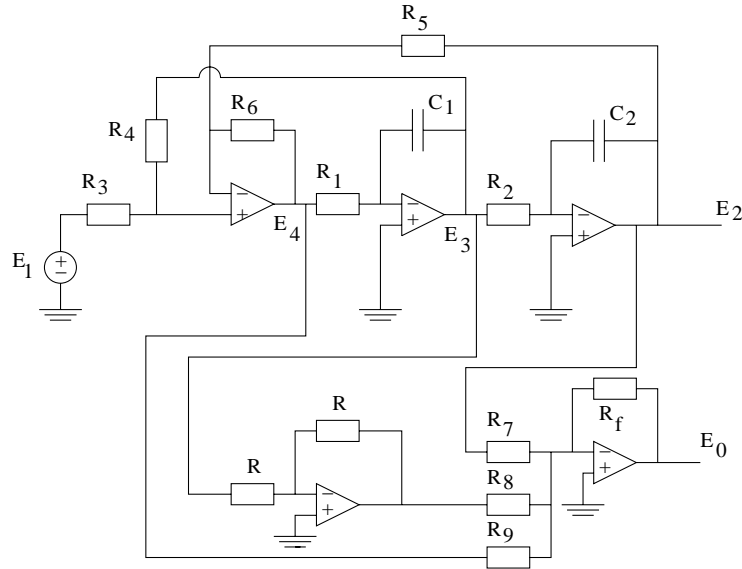


Figure 3.16:

De Tow-Thomas versie.

De 2 feedback factoren  $b_1$  en  $b_0$  in figuur 3.15a hebben tegengesteld teken. De benodigde aftrekking daardoor, kan worden vermeden als een invertor wordt gebruikt, voor of na de tweede integrator. Tegelijkertijd kunnen de input opteller en de eerste integrator worden gecombineerd tot een optellende integrator.

Dit levert figuur 3.17.

Hiervoor geldt:

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{\frac{1}{R_2 R_4 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} \cdot s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

en:

$$\frac{E_3}{E_1} = -\frac{\frac{1}{R_4 C_1} \cdot s}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Dus:

de inverterende en de niet-inverterende laagdoorlaat en de inverterende banddoorlaat is beschikbaar.

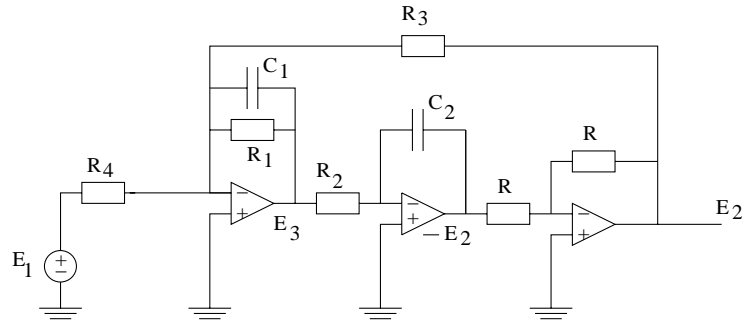


Figure 3.17:

Het ontwerp is eenvoudig:

kies  $C_1 = C_2 = 1 \text{ F}$  en  $R_2 = R_3$ .

Voor het laagdoorlaat geval:

$$R_1 = \frac{1}{b_1}, R_2 = R_3 = \frac{1}{\sqrt{b_0}}, R_4 = \frac{R_3}{G} = \frac{1}{G\sqrt{b_0}}$$

Voor het banddoorlaat geval: maak  $R_4 = \frac{1}{Gb_1}$ .

**De Fleischer-Tow versie.**

De Tow-Thomas sectie kan worden aangepast zodanig dat de algemene tweede orde sectie mogelijk wordt.

Hiertoe worden twee feed-forward paden toegevoegd.

De schakeling is gegeven in figuur 3.18.

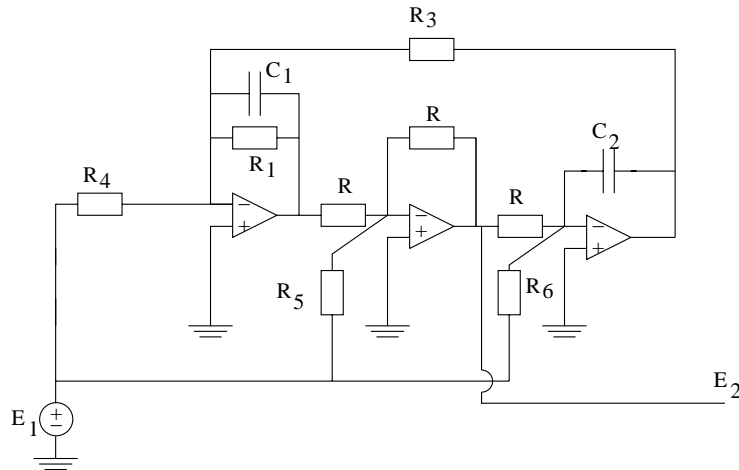


Figure 3.18:

(De positie van de tweede integrator en de invertor zijn van plaats verwisseld).

Er geldt:

$$\frac{E_2}{E_1} = -\frac{\frac{R}{R_5}s^2 + \frac{1}{R_1C_1}\left(\frac{R}{R_5} - \frac{R_1}{R_4}\right)s + \frac{1}{R_3R_6C_1C_2}}{s^2 + \frac{1}{R_1}C_1s + \frac{1}{R_2R_3C_1C_2}}$$

De waarden van  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $C_1$  en  $C_2$  worden gekozen als bij de Tow-Thomas versie:

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ F}, R_1 = \frac{1}{b_1}, R_2 = R_3 = \frac{1}{\sqrt{b_0}}, R \text{ willekeurig.}$$

**Laagdoorlaat:**

$$R_4 = \infty, R_5 = \infty, R_6 = \frac{R_2}{G}$$

**Banddoorlaat:**

$$R_5 = \infty, R_6 = \infty, R_4 = \frac{R_1}{G}$$

**Hoogdoorlaat:**

$$R_6 = \infty, R_4 = \frac{R_1}{G}, R_5 = \frac{R}{G}$$

**Bandsper:**

$$R_4 = \frac{R_5 R_1}{R}$$

$R_5$  en  $R_6$  te kiezen voor  $a_2$  en  $a_0$ .

**All-pass:**

$$R_5 = \frac{R}{G}, R_6 = \frac{R_2}{G}, R_4 = \frac{R_1}{2G}$$

### 3.5 Switched-capacitor secties

Het is niet zo dat elke, beschreven, sectie zomaar vertaald kan worden naar een switched-capacitor versie.

Als verschillende capaciteiten tijdens een klokfase met elkaar interactie gaan vertonen, kan de juiste werking verstoord worden.

Bepaalde secties lenen zich echter prima voor de vertaling naar een switched-capacitor versie.

Een ervan is de KHN-sectie:

Deze is opnieuw getekend in figuur 3.19. De schakeling bestaat uit 3 onderdelen.

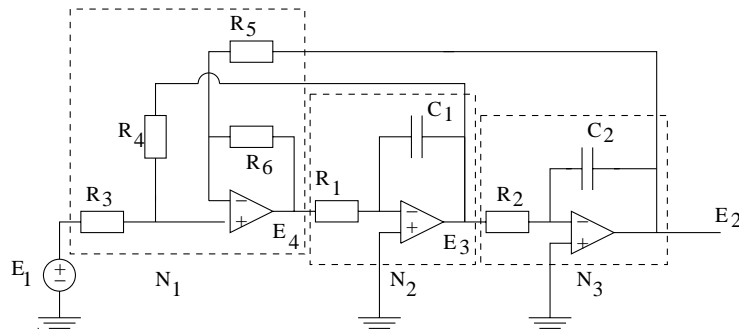


Figure 3.19:

Blok  $N_1$  is een 'all-resistor' op-amp circuit. Elke weerstand kunnen we dus vervangen door een capaciteit:

$$\frac{1}{R_i} \text{ wordt } C_i$$

De blokken  $N_2$  en  $N_3$  zijn elk een inverterende integrator.

$$\frac{E_3}{E_4} = -\frac{1}{R_1 C_1 s} \text{ en } \frac{E_2}{E_3} = -\frac{1}{R_2 C_2 s}$$

Nu wordt dus:

$$C_{R_1} = \frac{1}{f_c R_1} \text{ en } C_{R_2} = \frac{1}{f_c R_2}$$

De schakeling is gegeven in figuur 3.20.

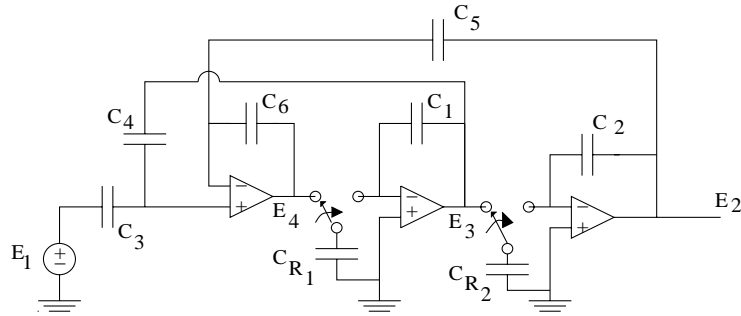


Figure 3.20:

Een tweede sectie die geschikt is voor vertaling naar een switched-capacitor versie: de Tow-Thomas sectie van figuur 3.17 is opnieuw getekend als figuur 3.21.

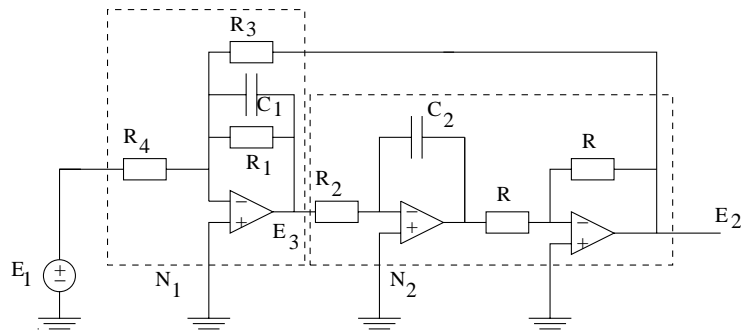


Figure 3.21:

Dit bestaat uit 2 blokken:  $N_1$  en  $N_2$ .

Voor  $N_1$ :

$$E_3 = -\frac{1}{R_1 C_1 s} E_3 - \frac{1}{R_4 C_1 s} E_1 - \frac{1}{R_3 C_1 s} E_2$$

De switched-capacitor versie is figuur 3.5c.

Voor  $N_2$ :

$$E_2 = \frac{1}{R_2 C_2 s} E_3$$

De switched-capacitor versie is figuur 3.6a.

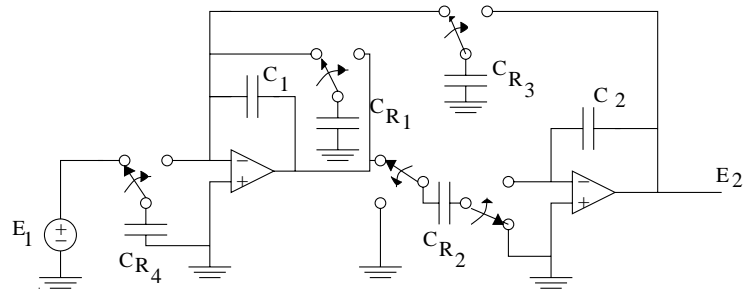


Figure 3.22:

De komplette Tow-Thomas switched-capacitor sectie is gegeven in figuur 3.22.



### 3.6 Aktieve filters van willekeurige orde

Een overdrachtsfunctie van willekeurige orde kan altijd worden opgesplitst in eerste en tweede orde delen.

Deze kunnen dan elk afzonderlijk worden gerealiseerd m.b.v. het voorgaande, en daarna gecascadeerd. Hier is ee grote vrijheid van combinaties van nulpunten en polen in secties en de volgorde van cascadering. Dit wordt hier niet verder uitgewerkt.

#### De toestandsvariabelen methode

Kijken we naar de algemene vorm:

$$H(s) = \frac{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + \dots + b_1 s + b_0}$$

Voor het geval  $a_1$  tot en met  $a_m$  gelijk is aan 0: (de all-pole overdrachtsfunctie) kunnen we figuur 3.23 nemen als realisatie met n integratoren. Willen we inverterende integratoren gebruiken dan kan dat ook: zie figuur 3.24 of figuur 3.25.

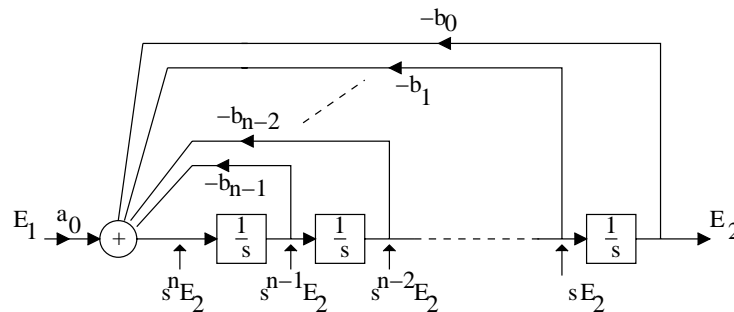


Figure 3.23:

De willekeurige functie kan gerealiseerd worden met figuur 3.26 als  $m < n$ .

De situatie  $m = n$  vereist figuur 3.27 waarin:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 - a_n b_0 \\ c_1 &= -a_1 + a_n b_1 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

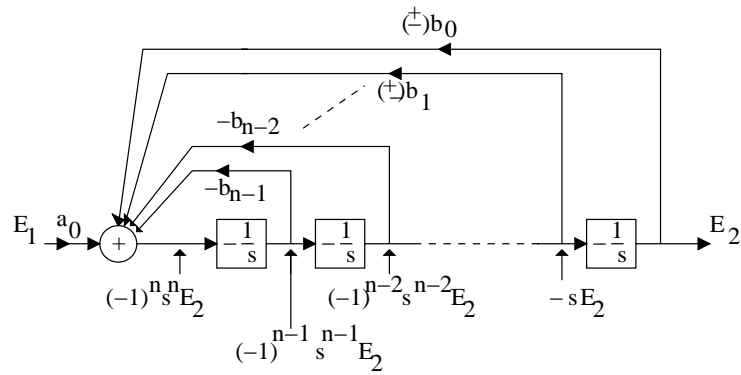


Figure 3.24:

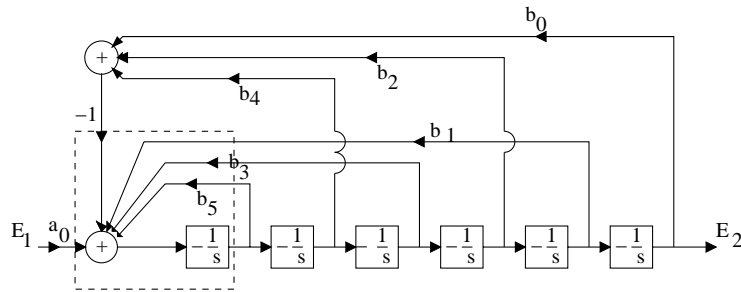


Figure 3.25:

$$c_{n-2} = a_{n-2} - a_n b_{n-2}$$

$$c_{n-1} = -a_{n-1} + a_n b_{n-1}$$

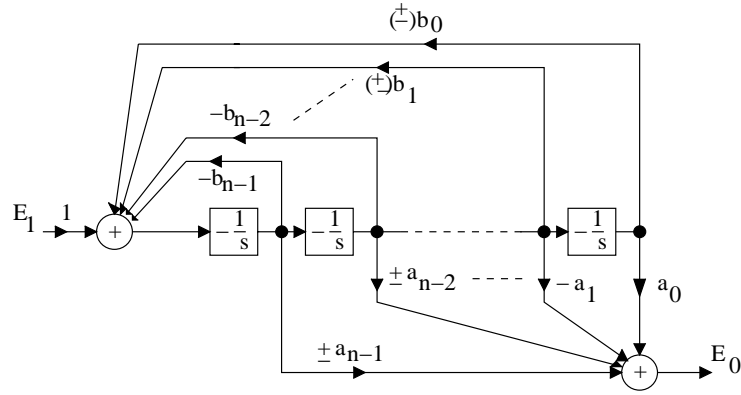


Figure 3.26:

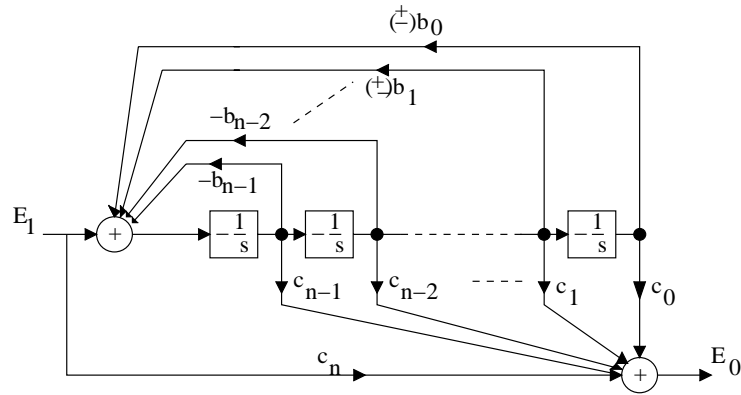


Figure 3.27:

## Chapter 4

# Verliesvrije ladderstructuren

### 4.1 Mogelijke ladderrealisaties

Voor de Butterworth- en Chebyshev benaderingen van laagdoorlaatfuncties ontstaan ladders van het type van figuur 4.1. We verwijzen hier naar de tabellen in hoofdstuk 6 voor de betrokken overdrachtsfuncties en de netwerkelementen.

Er volgt dat het aantal verliesvrije elementen gelijk is aan de orde  $n$  van de benadering en van de graad van  $H(s)$ .

Voor de Chebyshev rationale functie benadering (en  $n=5$ ) ontstaat figuur 4.2. De polen van  $R_5$  (en dus de nulpunten van  $H(s)$ ), zijn aanwezig in de vorm van resonantiekringen in het netwerk en kunnen dus nauwkeurig op hun plaats worden afgeregeld. In dit geval is het aantal verliesvrije elementen niet minimaal (er zijn lussen van capaciteiten).

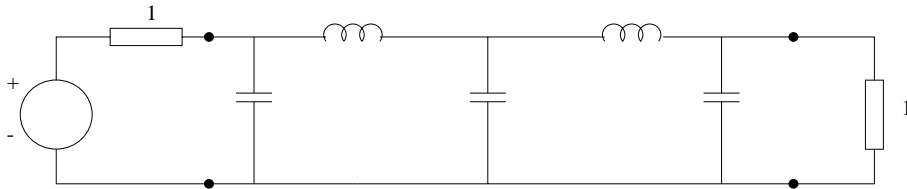


Figure 4.1:  $n=5$ , Butterworth of Chebyshev mogelijk

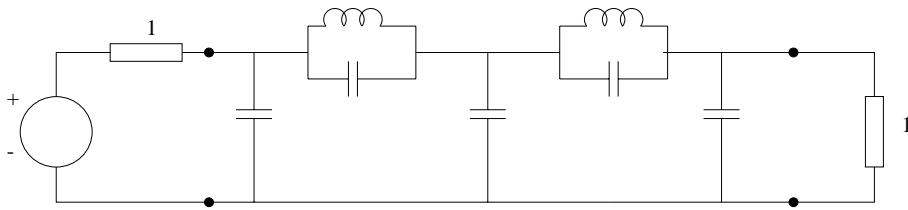


Figure 4.2:  $n=5$ , Chebyshev rat. functie mogelijk

De ladderstructuren zijn geen garantie voor positieve elementwaarden.

Uit het bestaan van tabellenboeken met elementwaarden voor veelgebruikte standaardfilters blijkt echter dat meestal positieve waarden mogelijk zijn.

Deze met weerstanden afgesloten ladderstructuren zijn bijzonder geschikt om zeer selectieve filters mee te realiseren, vanwege het feit dat ze gebaseerd zijn op vermogensoverdracht tussen bron en belasting. In het volgende kwartaal zullen we daar veel verder op ingaan.

In de volgende paragraaf bespreken we alvast enkele eenvoudige netwerken.

## 4.2 Vermogensoverdracht en laddernetwerken

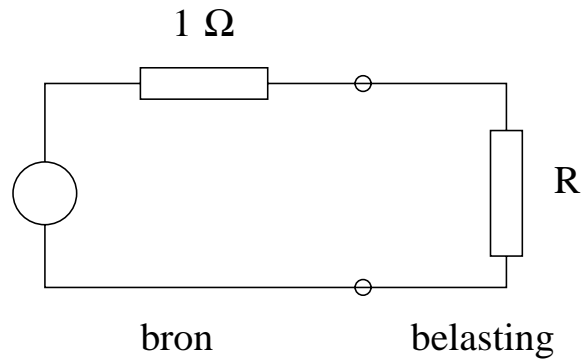


Figure 4.3:

De bron in figuur 4.3 levert maximaal vermogen aan de belasting als  $R = 1\Omega$ .

Als  $R = 1\Omega$  geldt dus voor elke frekwentie:

$$\frac{P}{P_{max}} = 1.$$

$P$  is het vermogen geleverd in de belasting.  $P_{max}$  is het maximaal beschikbare vermogen in de bron.

Er geldt:  $0 \leq \frac{P}{P_{max}} \leq 1$  in het algemeen.

Eerste orde:

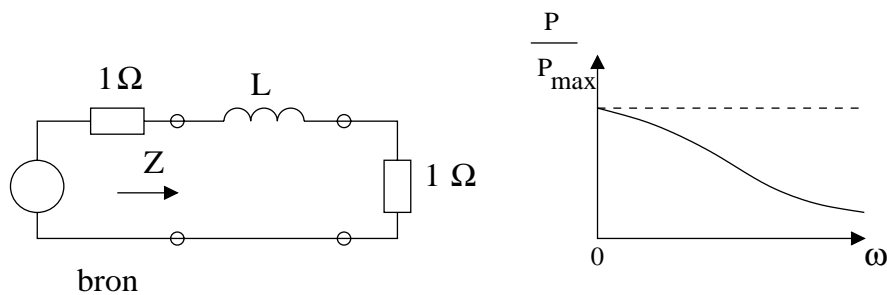


Figure 4.4:

In de figuur 4.4 is een netwerk getekend met een enkel verliesvrij element tussen bron en belasting. Bij  $\omega = 0$  ziet de bron een impedantie  $Z$  van  $1 \Omega$ . De bron levert dan dus een maximaal vermogen aan de belastingsweerstand. Voor elke andere frequentie wordt minder dan het maximaal beschikbare vermogen geleverd. De bijbehorende grafiek is dus zoals getekend. Hetzelfde geldt voor figuur 4.5.

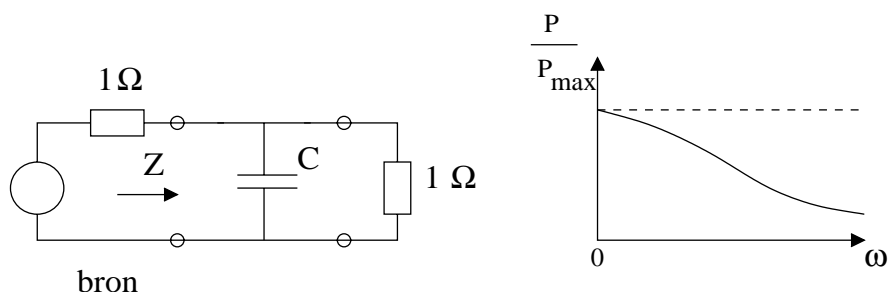


Figure 4.5:

Met beide netwerken is het mogelijk een eerste orde Butterworth of Chebyshev karakteristiek te realiseren mits we de juiste waarde voor het verliesvrije element kennen. Dit zullen we in een later stadium kunnen uitrekenen, vooralsnog nemen we genoegen met de tabellen in paragraaf 6.3.

Tweede orde:

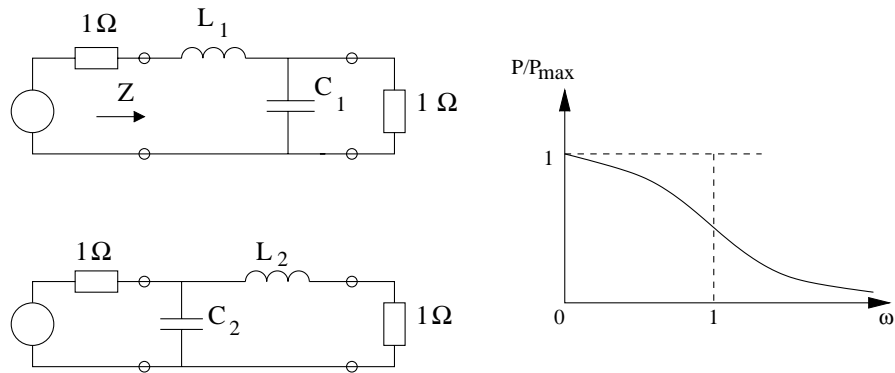


Figure 4.6:

Ook in figuur 4.6 geldt dat  $\frac{P}{P_{max}}$  kan veranderen van 1 naar 0 langs de frekwentie-as. In figuur 4.6 is hiervoor een Butterworth-achtig verloop getekend.

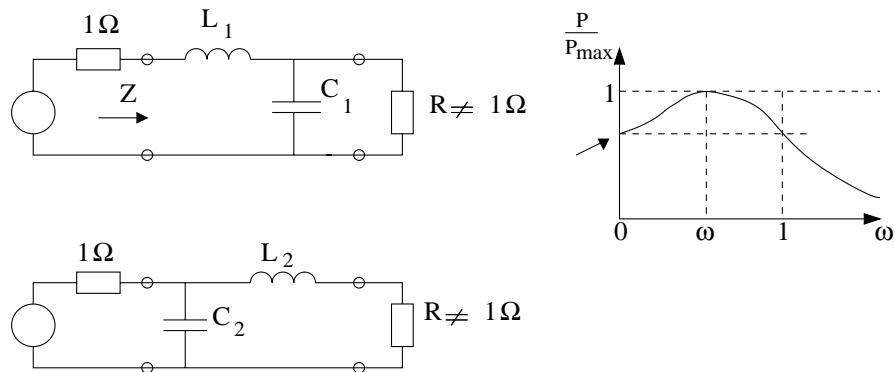


Figure 4.7:

In figuur 4.7 is de situatie getekend als een Chebyshev karakter voor het verloop langs de frekwentie-as wordt verlangd. In dit geval moet de belastingsweerstand ongelijk zijn aan 1 omdat (door de keus van  $\epsilon$  in het frekwentie-verloop)  $\frac{P}{P_{max}}$  bij  $\omega = 0$  niet gelijk kan zijn aan 1.

Derde orde:

De mogelijke twee netwerken waarmee een Butterworth of Chebyshev karakter



kan worden gemaakt, zijn getekend in figuur 4.8. Weerstanden zijn  $1 \Omega$ ! Een belangrijke eigenschap is hier de symmetrie in de netwerken. We zullen later inzien hoe dat komt. Dit zal blijken te gelden voor alle oneven orde Butterworth en Chebyshev netwerken.

In figuur 4.9 zijn deze derde orde karakteristieken getekend.

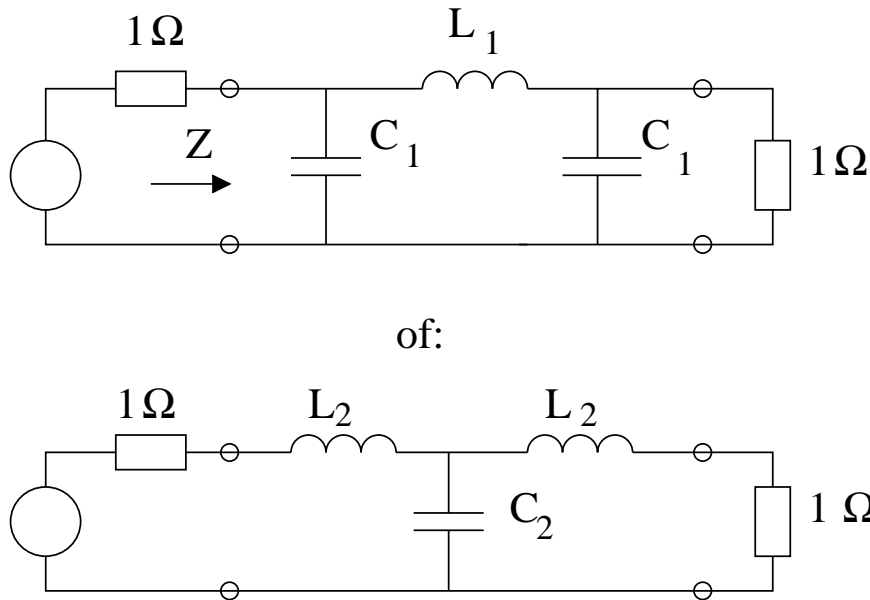


Figure 4.8:

Voor  $\omega = \omega_1$  in het Chebyshev geval, is er blijkbaar een impedantie  $Z_\omega = 1$  want daar geldt:  $\frac{P}{P_{max}} = 1$ . Dit was ook het geval bij de tweede orde in het Chebyshev geval!

In de figuren 4.10 en 4.11 is de situatie geschetst als een derde orde Cauer karakteristiek dient gerealiseerd te worden. In de (symmetrische!) netwerken is een resonantie-kring aanwezig, deze is verantwoordelijk voor het overdracht-snulpunt bij  $\omega = \omega_1$  Voor hogere orde Cauer ladder-netwerken mag niet meer op symmetrie worden gerekend. Want in de ladders zullen resonantie kringen gaan voor komen met verschillende resonantie frekwenties.

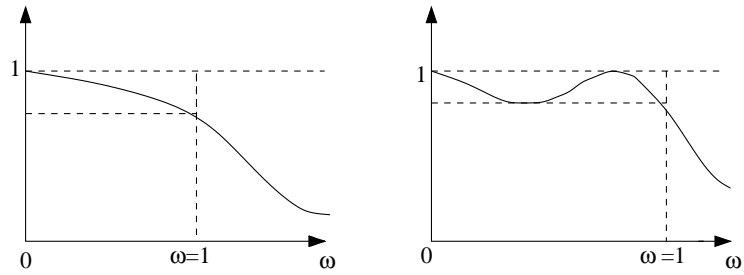


Figure 4.9:

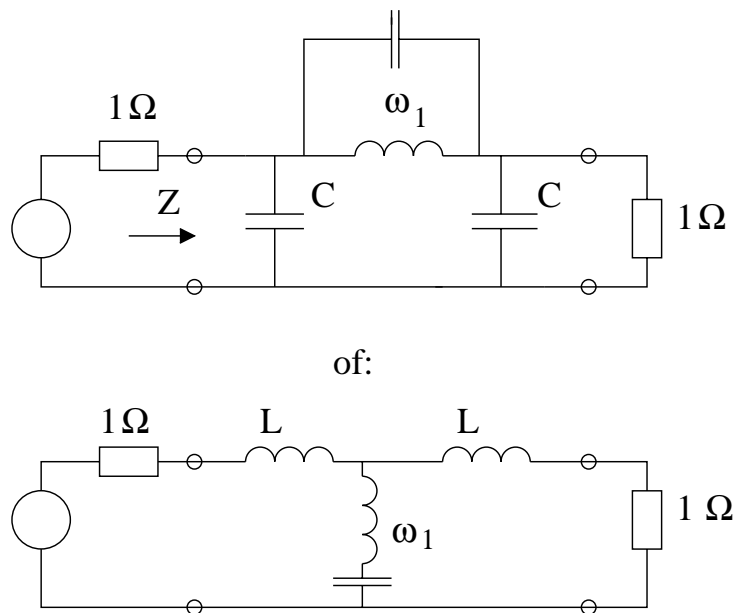


Figure 4.10:

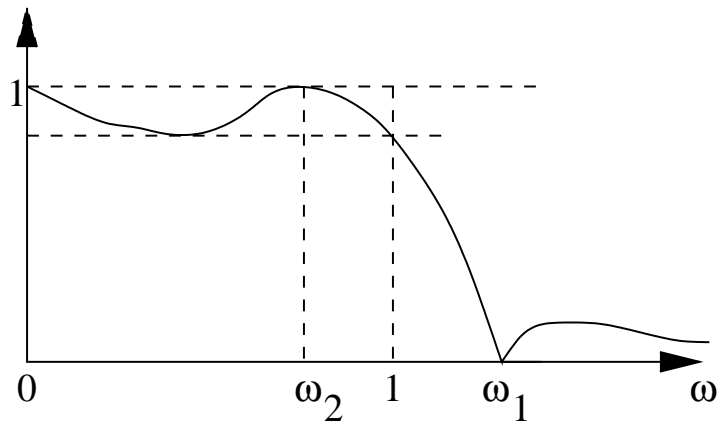
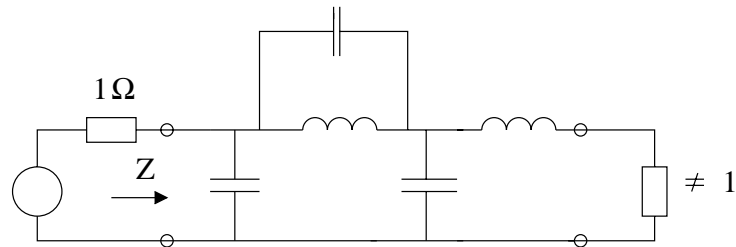


Figure 4.11:

Vierde orde:

In figuur 4.12 is een vierde orde Cauer netwerk en de bijbehorende karakteristiek getekend. (belastingsweerstand ongelijk aan 1!) Voor een vierde orde Chebyshev verdwijnt een van de netwerkelementen uit de resonantie kringen en blijft de belastingsweerstand ongelijk aan 1. Het vierde orde Butterworth netwerk krijgt weer beide weerstanden van  $1 \Omega$ .



of:

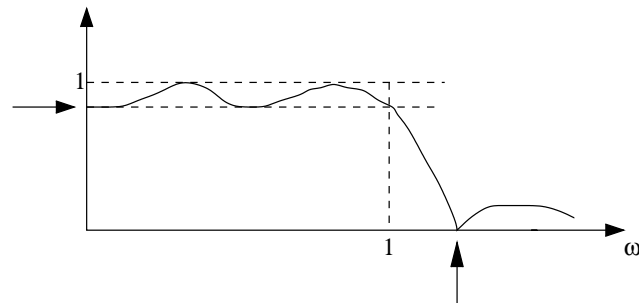
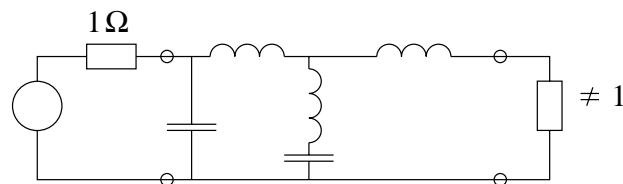


Figure 4.12:

Vijfde orde:

In figuur 4.13 is de situatie voor een vijfde orde Cauer karakteristiek getekend. Hier is zoals aangekondigd, geen sprake meer van symmetrie. Ook is het aantal elementen ongelijk aan de orde.

Voor vijfde orde Butterworth en Chebyshev is het aantal elementen wel gelijk

aan de orde en is er ook symmetrie.

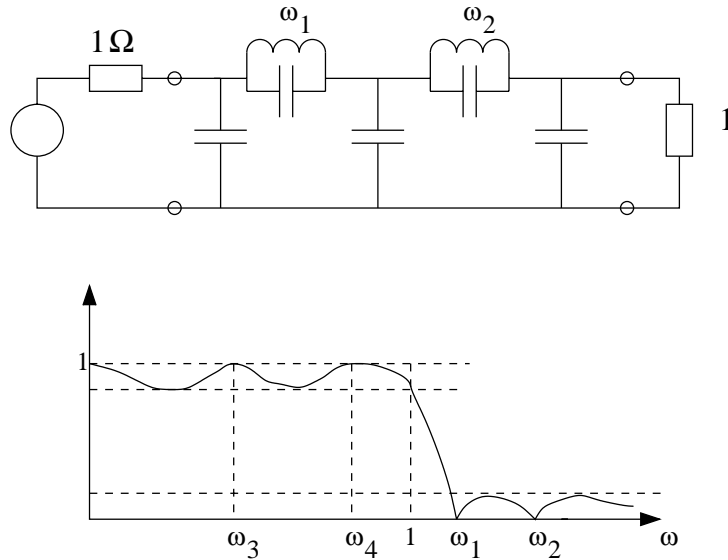


Figure 4.13:

### 4.3 Opmerkingen

1. Voor Butterworth en Chebyshev netwerken geldt: het aantal verliesvrije elementen is gelijk aan de orde. Voor oneven orde zijn de netwerken ook nog symmetrisch.
2. Cauer netwerken hebben deze voordelen niet, maar hier kunnen de resonatiekringen weer op hun juiste waarde worden afgeregeld zodat de sferband een juist verloop zal hebben ook als de netwerkelementen niet precies de ideale waarden hebben.
3. Bij frekwenties waarvoor geldt:  $\frac{P}{P_{max}} = 1$ , geldt ook:

$$\frac{d\left(\frac{P}{P_{max}}\right)}{d(\text{elementwaarde})} = 0!$$

want  $\frac{P}{P_{max}}$  kan niet groter dan 1 worden. Zie figuur 4.14.

Hierdoor wordt de doorlaatband ongevoelig voor kleine elementen variaties.

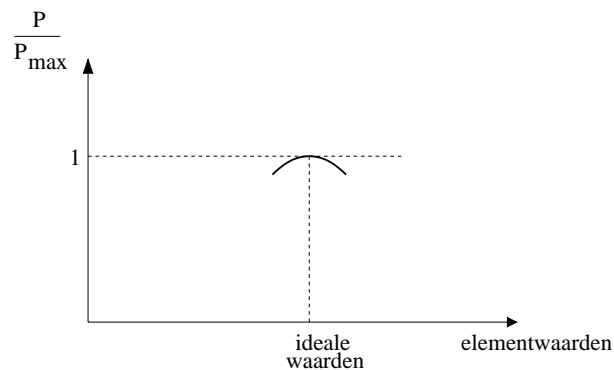


Figure 4.14: maximum voor ideale elementwaarden

4. De invloed van de transformaties op de netwerkelementen en hun waarden is gegeven in figuur 4.15. Voor de banddoorlaattransformatie zijn die transformaties nog apart gegeven in figuur 4.16.
5. Bij filters wordt vaak het begrip 'demping' gebruikt en uitgedrukt in 'decibel'.

De definitie is:

$$A_{(in\ db)} = -10 \log\left(\frac{P}{P_{max}}\right)$$

Als voorbeeld is in figuur 4.17 overdracht en demping van een derde orde overdracht met elkaar gerelateerd.

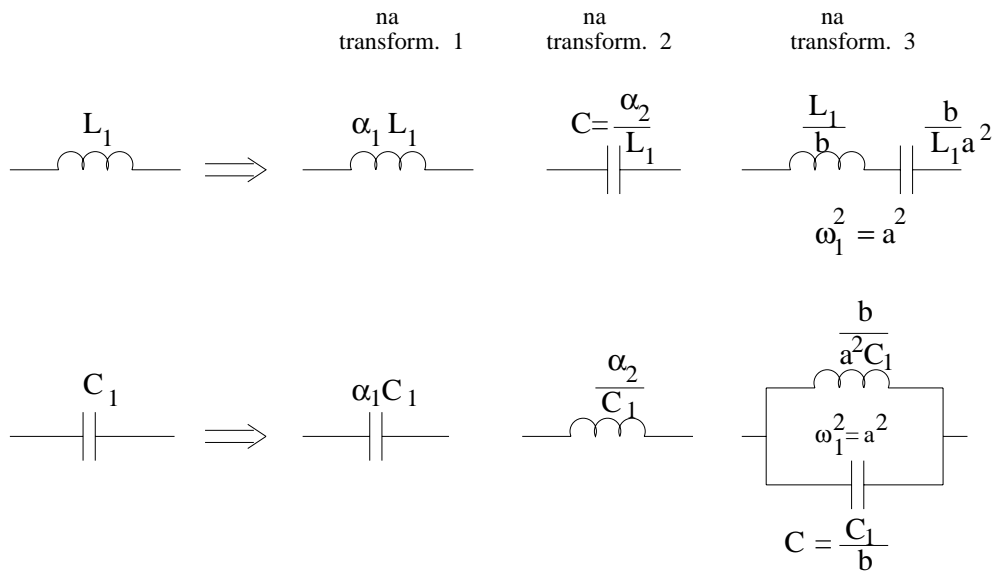


Figure 4.15: transformatie van netwerkelementen

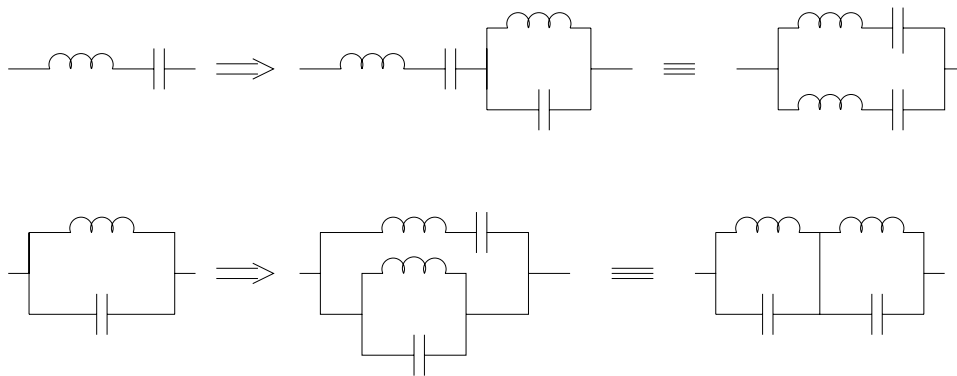


Figure 4.16: banddoorlaatttransformatie op LC kringen

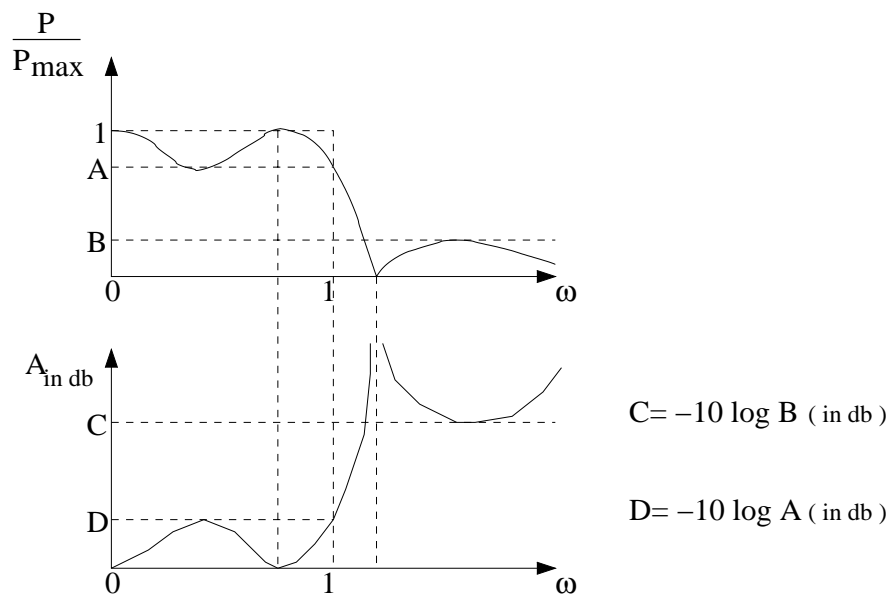


Figure 4.17: de relatie tussen overdracht en demping



## Chapter 5

# Simulatie van ladderfilterstructuren met actieve componenten

We zullen op 3 manieren de LC-ladderfilters simuleren:

1. Door alle aanwezige zelfindukties te vervangen door actieve componenten.
2. Door de ladderstructuur als geheel te simuleren.
3. Door zelfindukties te vervangen door "gyrator-C" combinaties.

## 5.1 De generalised impedance converter GIC

Bij de vervanging van zelfinducties zullen we gebruik maken van impedantie convertoren.

Voor de tweepoort van figuur 5.1 geldt de ABCD matrix:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} E_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

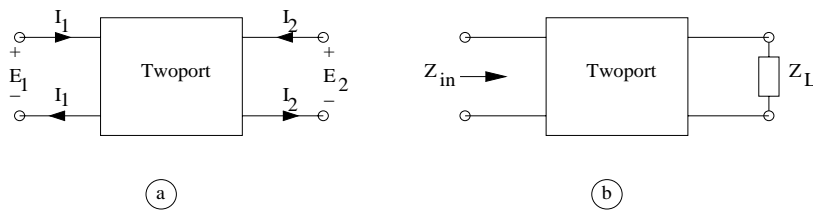


Figure 5.1:

Hieronder volgen enkele matrices **F**:

Positieve impedantie invertor:  $\begin{bmatrix} 0 & \pm R_1 \\ \pm \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}$

Positieve impedantie convertor:  $\begin{bmatrix} \pm K_1 & 0 \\ 0 & \pm K_2 \end{bmatrix}$

Stel we hebben een tweepoort zoals in figuur 5.1b, afgesloten in een impedantie  $Z_L$ .

Stel de tweepoort is een positieve impedantie invertor.

Dan wordt:  $Z_{in} = \frac{R_1 R_2}{Z_L}$ .

Stel  $Z_L$  is een capaciteit  $C$ , dan wordt  $Z_{in}$ :

$Z_{in} = R_1 R_2 C s$ , een zelfinductie met de waarde:

$$L = R_1 R_2 C$$

Dit type inverter kan dus gebruikt worden om een zelfinductie te vervangen. We zullen dit hier niet verder bespreken.

De F matrix van een "generalised impedance convertor" GIC heeft de vorm:

$$[F] = \begin{bmatrix} f_1(s) & 0 \\ 0 & f_2(s) \end{bmatrix}$$

Figuur 5.2 is een bekende GIC (die van Antoniou).

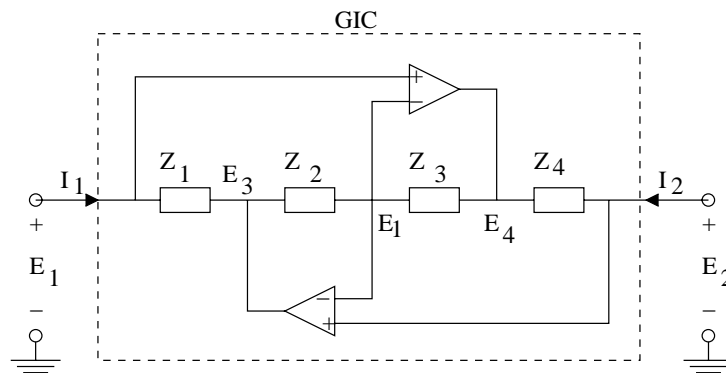


Figure 5.2:

Hiervoor kunnen we uitrekenen:

$$I_1 = \frac{E_1 - E_3}{Z_1}, \quad I_2 = \frac{E_2 - E_4}{Z_4} = \frac{E_1 - E_4}{Z_4}$$

$$\frac{E_3 - E_1}{Z_2} + \frac{E_4 - E_1}{Z_3} = 0$$

Hieruit volgt:

$$f_1(s) = 1, \quad f_2(s) = f(s) = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}$$

$$Z_{11} = \frac{E_1}{I_1} = \frac{1}{f(s)} \cdot \frac{E_2}{-I_2} = \frac{1}{f(s)} \cdot Z_5$$

$$Z_{22} = \frac{E_2}{I_2} = f(s) \cdot \frac{E_1}{-I_1} = f(s) \cdot Z_6$$

De gebruikte GIC symbolen geven we in figuur 5.4 en 5.5.

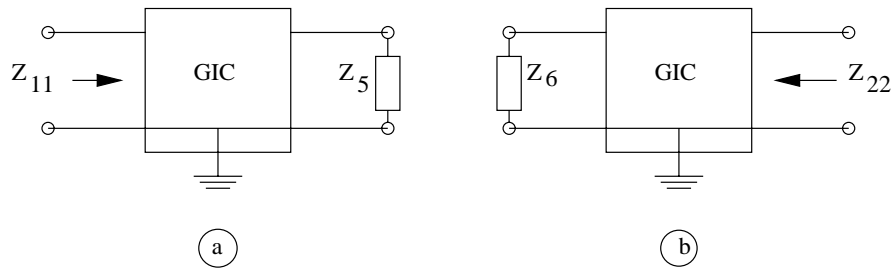


Figure 5.3:

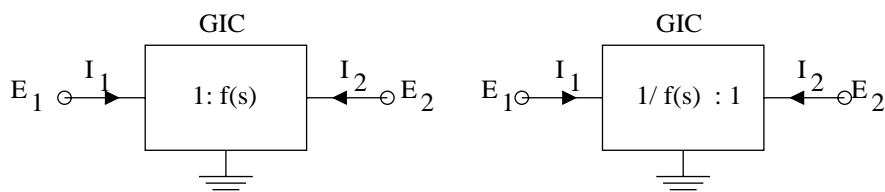


Figure 5.4:

## 5.2 Simulatie van een geaarde zelfinductie

We hebben hiervoor figuur 5.5 met  $Z_{in} = K \cdot s \cdot R_L$ .

Dan wordt:

$$L_{eq} = K \cdot R_L.$$

We kunnen de schakeling van figuur 5.2 gebruiken met  $Z_2$  of  $Z_4$  een capaciteit en de andere 3 een weerstand.

Dus:

$$Z_{in} = \frac{R_1 R_3 s C_2}{R_4} \cdot R_L \text{ of: } \frac{R_1 R_3 s C_4}{R_2} \cdot R_L$$

of:

$$L_{eq} = \frac{R_1 R_3 C_2 R_L}{R_4}, \text{ of: } \frac{R_1 R_3 C_4 R_L}{R_2}$$

dus:

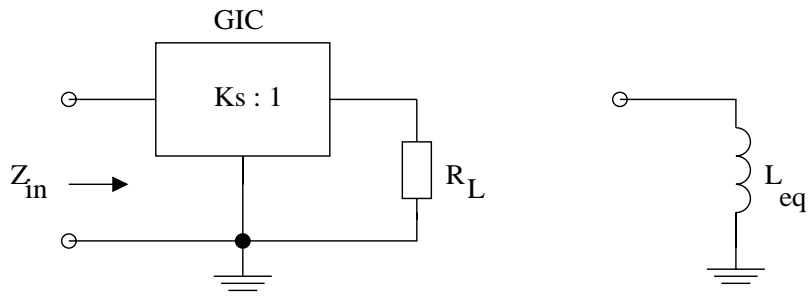


Figure 5.5:

$$K = \frac{R_1 R_3 C_2}{R_4} \text{ of: } \frac{R_1 R_3 C_4}{R_2}.$$

Figuur 5.6 geeft een vijfde orde Butterworth hoogdoorlaat en figuur 5.7 de simulatie hiervan waarin de 2 zelfindukties zijn vervangen.

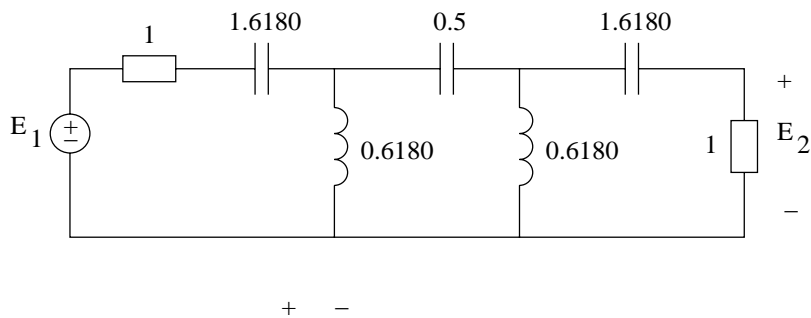


Figure 5.6:

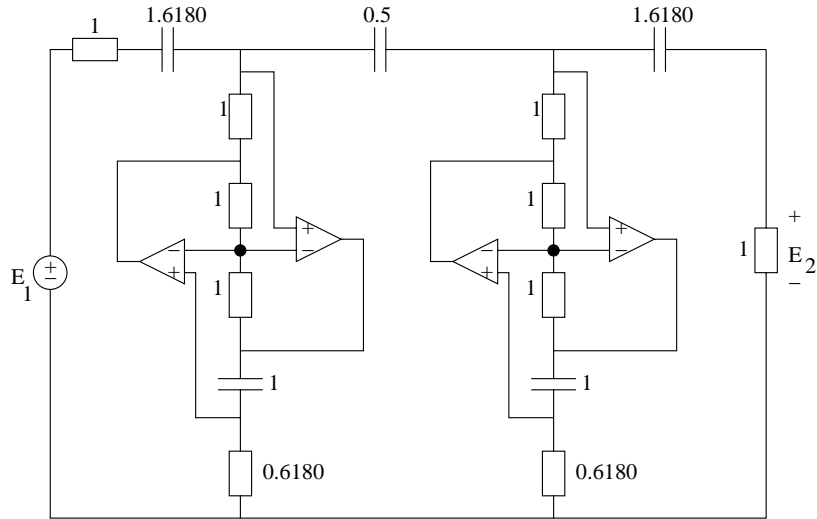


Figure 5.7:

### 5.3 Simulatie van een niet-geaarde zelfinductie

De schakeling van figuur 5.8a kan gebruikt worden om figuur 5.8b te simuleren.  
Want in figuur 5.8a:

$$E'_1 = E_1, E'_2 = E_2.$$

$$I'_1 = K s I_1, I'_2 = K s I_2.$$

$$I'_1 = -I'_2, I_1 = -I_2.$$

omdat:  $\frac{E'_1 - E'_2}{I'_1} = R,$

volgt dat:

$$\frac{E_1 - E_2}{I_1} = K \cdot s \cdot R.$$

In figuur 5.8b hebben we:

$$\frac{E_1 - E_2}{I_1} = s L_{eq} \text{ en } I_1 = -I_2.$$

en dus geldt:

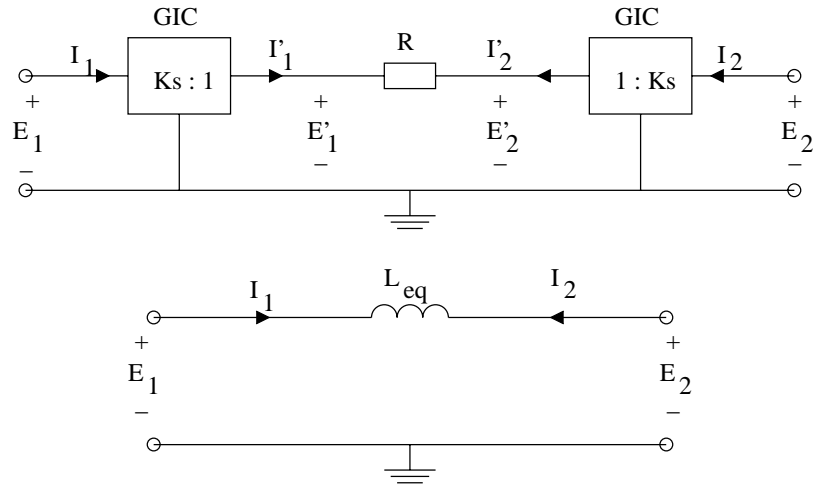


Figure 5.8:

$$\underline{L_{eq} = K.R}$$

Figuur 5.9b geeft als voorbeeld de simulatie van figuur 5.9a.

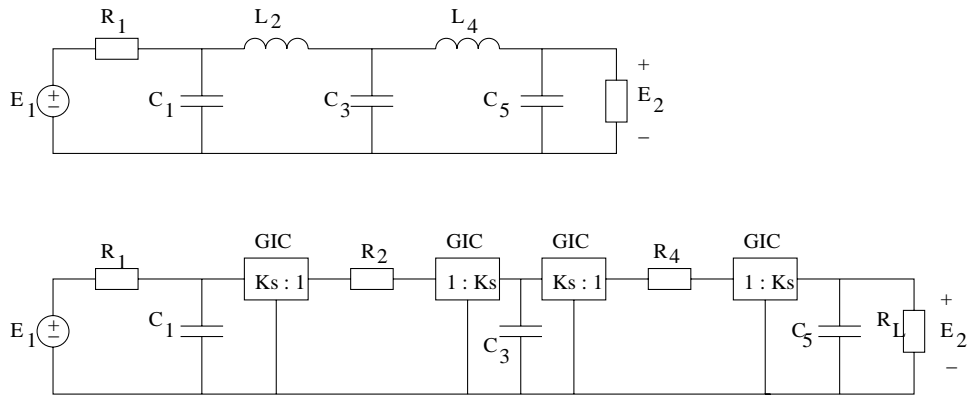


Figure 5.9:

## 5.4 Funktionale simulatie van laddernetwerken

Veronderstel het laddernetwerk van figuur 5.10a.

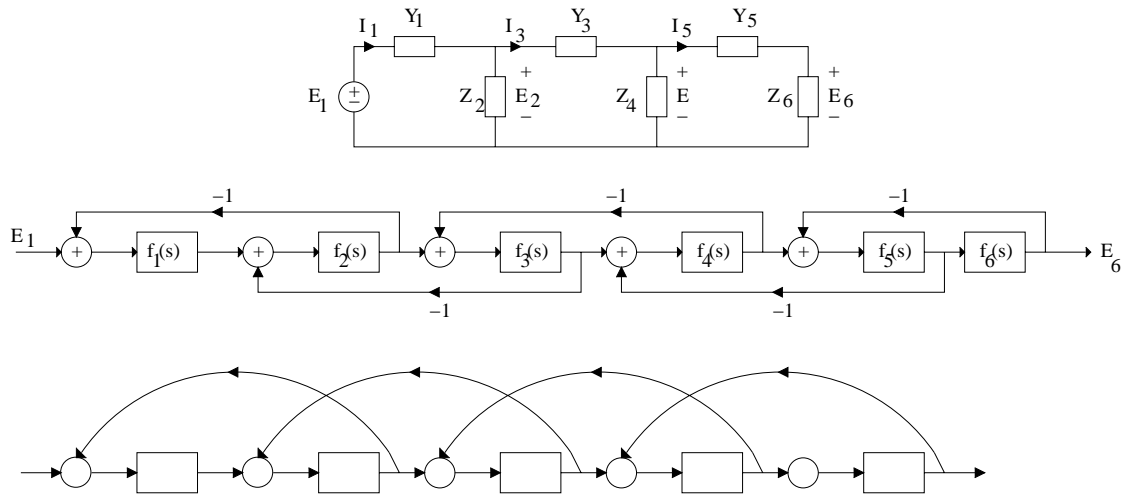


Figure 5.10:

De vergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1(E_1 - E_2) & E_2 &= Z_2(I_1 - I_3) \\ I_3 &= Y_3(E_2 - E_4) & E_4 &= Z_4(I_3 - I_5) \\ I_5 &= Y_5(E_4 - E_6) & E_6 &= Z_6 I_5 \end{aligned}$$

Veronderstel dat we de verhouding  $E_6/E_1$  willen realiseren. Dat wil zeggen dat we in bovenstaande set vergelijkingen de stromen  $I$  mogen vervangen door andere spanningen  $V_i$  en de  $Y$ 's en de  $Z$ 's kunnen worden gezien als functies in  $s$  die de spanningen in de vergelijkingen verbinden.

De verhouding  $E_6/E_1$  zal hierdoor niet veranderen:

$$\begin{aligned} V_1 &= f_1(s)(E_1 - E_2) & E_2 &= f_2(s)(V_1 - V_3) \\ V_3 &= f_3(s)(E_2 - E_4) & E_4 &= f_4(s)(V_3 - V_5) \\ V_5 &= f_5(s)(E_4 - E_6) & E_6 &= f_6(s)V_5 \end{aligned}$$

Deze set vergelijkingen komt overeen met figuur 5.10b

Deze vorm heet de leap-frog realisatievorm.

De invertoren kunnen worden ingekapseld in de vorm van figuur 5.11.



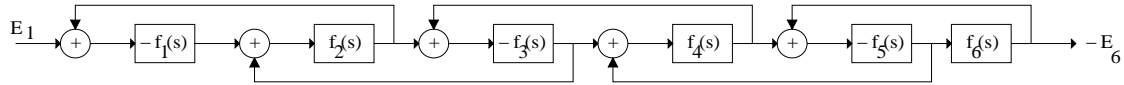


Figure 5.11:

Leapfrog realisatie van een laagdoorlaat LC ladder.  
 Als voorbeeld nemen we figuur 5.12.

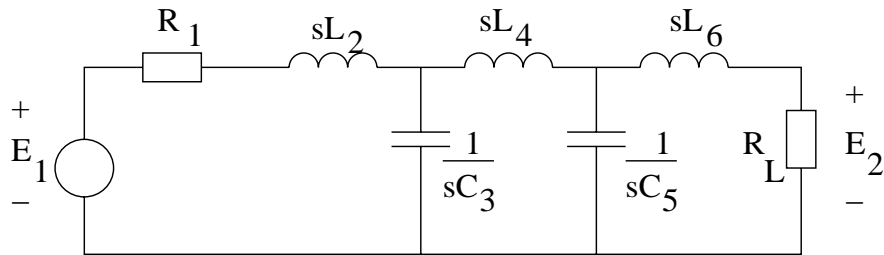


Figure 5.12:

We schrijven:

$$\begin{aligned}
 f_1(s) &= \frac{1}{R_1 + sL_2} = \frac{\frac{1}{L_2}}{s + \frac{R_1}{L_2}} & f_2(s) &= \frac{1}{sC_3} \\
 f_3(s) &= \frac{1}{sL_4} & f_4(s) &= \frac{1}{sC_5} \\
 f_5(s) &= \frac{1}{sL_6} & f_6(s) &= R_L
 \end{aligned}$$

Elk blok kan gemaakt worden met een wel of niet verliesvrije integrator.  
 De uiteindelijke op-amp schakeling is figuur 5.13.

De bijbehorende blokdiagrammen zijn nog gegeven in figuur 5.10b en 5.14.  
 Het eerste blok samen met de aftrekker is een "differential lossy integrator".  
 Het laatste blok is een niet-inverterende versterker.  
 De swith-capacitor implementatie van het geheel is gegeven in figuur 5.15.

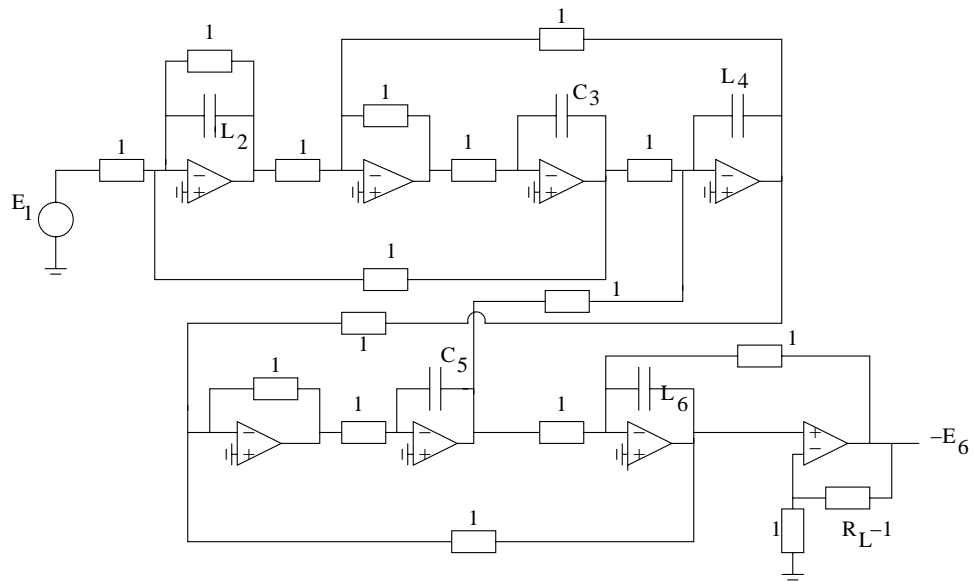


Figure 5.13:

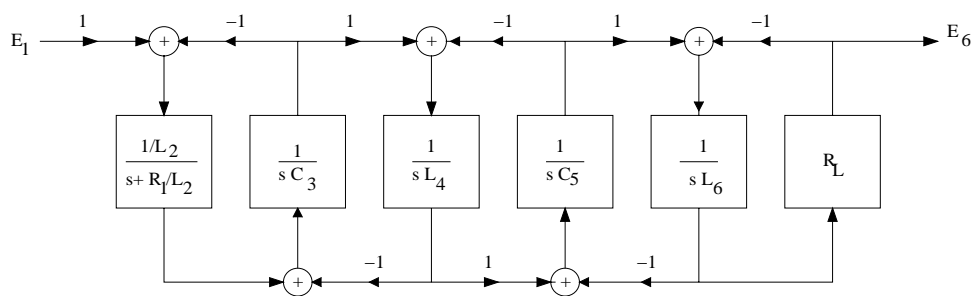


Figure 5.14:

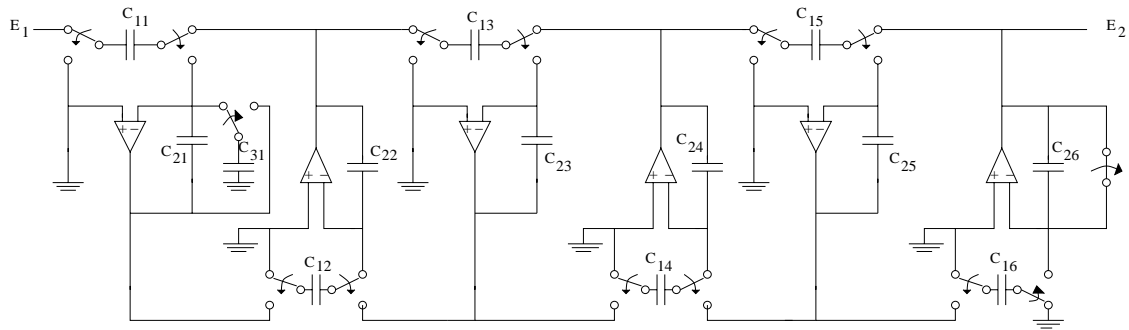


Figure 5.15:

## 5.5 Vervanging van zelfindukties door gyrator-C combinaties

Uitgangspunt is de gyrator van figuur 5.16:

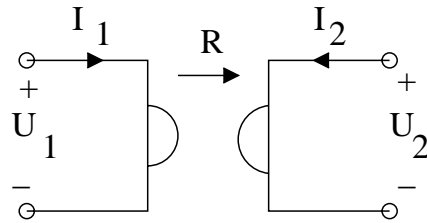


Figure 5.16:

met:  $U_1 = -RI_2$  en  $U_2 = RI_1$ .

Verbinden we aan poort 2 een capaciteit C dan vinden we figuur 5.17:

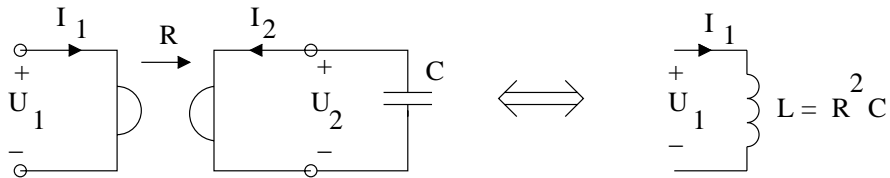


Figure 5.17:

Gebruik makend van de equivalentie van figuur 5.17 kunnen we van elke verliesvrije LC-ladder een verliesvrije gyrator-C ladder maken.

Als voorbeeld is figuur 5.18 vertaald naar figuur 5.19.

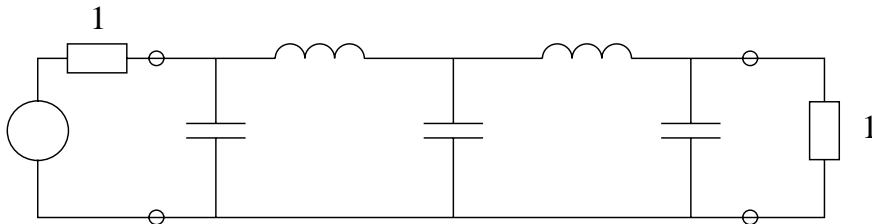


Figure 5.18:

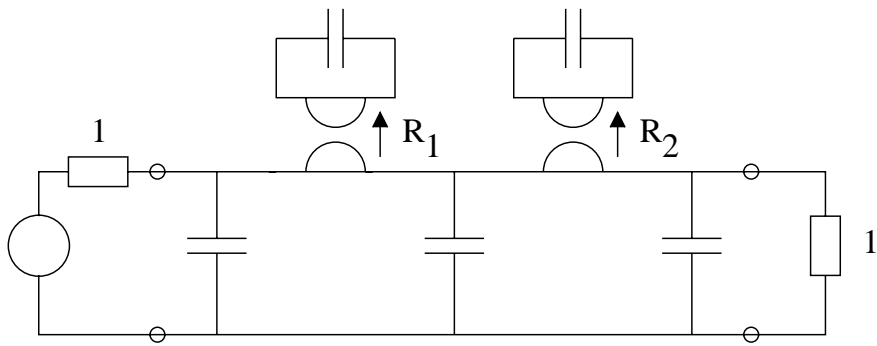


Figure 5.19:

## Chapter 6

# Filtertabellen en grafieken

## 6.1 Handbook of filter synthesis, A. I. Zverev

.



.

.

.

.

.

.

.





.

.

.

.

.

.

.

.



.

.

## 6.2 Filter design tables and graphs, Christian - Eisenmann

.

.

.

.

.



.

.

.

.



.

.

.



.

.

.

.

.

.

.

.



.

.

.

.

.

## 6.3 Elementwaarden van Butterworth en Chebyshev ladders.

### 6.3.1 Butterworth:

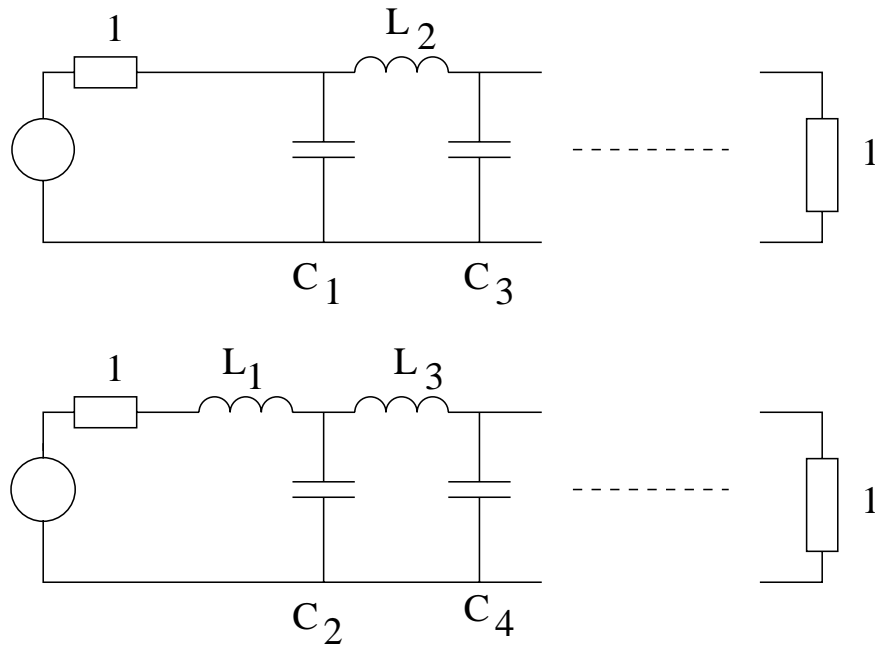


Figure 6.1:

De normering in de frekwentie is hier zodanig dat geldt:

De demping  $A = -3$  db voor  $\omega = 1$ .

n	$C_1$	$L_2$	$C_3$	$L_4$	$C_5$	$L_6$	$C_7$	$L_8$	$C_9$	$L_{10}$
2	1.4142	1.4142								
3	1.0000	2.0000	1.0000							
4	0.7654	1.8478	1.8478	0.7654						
5	0.6180	1.6180	2.0000	1.6180	0.6180					
6	0.5176	1.4142	1.9319	1.9319	1.4142	0.5176				
7	0.4450	1.2470	1.8019	2.0000	1.8019	1.2470	0.4450			
8	0.3902	1.1111	1.6629	1.9616	1.9616	1.6629	1.1111	0.3902		
9	0.3473	1.0000	1.5321	1.8794	2.0000	1.8794	1.5321	1.0000	0.3473	
10	0.3129	0.9080	1.4142	1.7820	1.9754	1.9754	1.7820	1.4142	0.9080	0.3129
	$L_1$	$C_2$	$L_3$	$C_4$	$L_5$	$C_6$	$L_7$	$C_8$	$L_9$	$C_{10}$

.

We zijn zelfs in staat met eenvoudige formules de elementwaarden uit de vorige tabel (en meer) te berekenen.

Hieronder volgen deze formules en enkele voorbeelden van berekening.

$$L_{2m-1} = 2 \sin \gamma_{4m-3}$$

$$C_{2m} = 2 \sin \gamma_{4m-1}$$

met:

$$\gamma_x = x \cdot \frac{\pi}{2n}$$

### 6.3.2 Chebyshev:

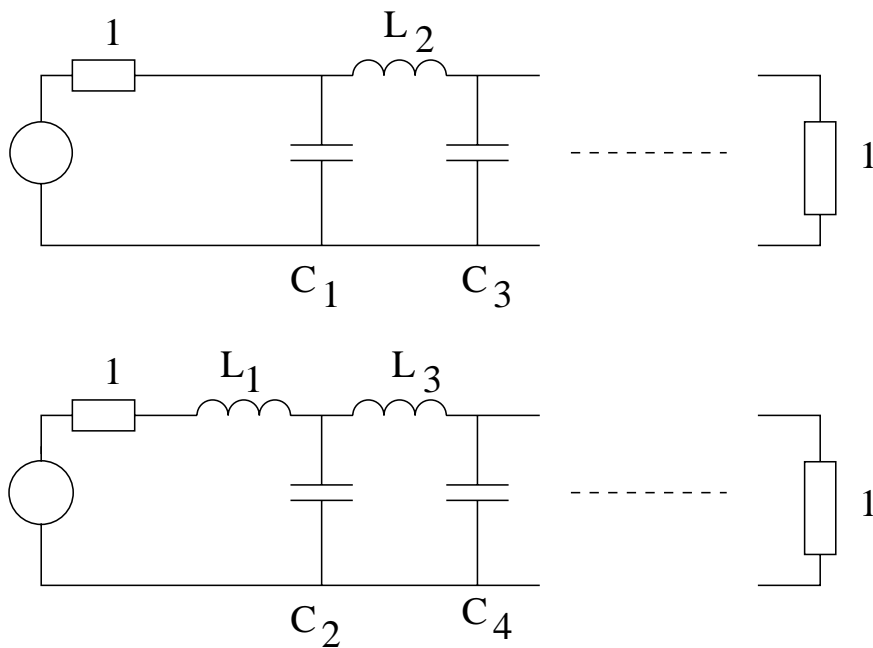


Figure 6.2:

Hieronder volgt een tabel voor  $n = 3, 5, 7$  en  $9$  voor  $A_{max} = 0.01, 0.1$  en  $0.5$  db. Let op: De demping  $A = -3$  db voor  $\omega = 1$ .



<b>n</b>	$A_{max}$	$C_1$	$L_2$	$C_3$	$L_4$	$C_5$
<b>3</b>	<b>0.01</b>	<b>1.1811</b>	<b>1.8214</b>			
	<b>0.1</b>	<b>1.4328</b>	<b>1.5937</b>			
	<b>0.5</b>	<b>1.8636</b>	<b>1.2804</b>			
<b>5</b>	<b>0.01</b>	<b>0.9766</b>	<b>1.6849</b>	<b>2.0366</b>		
	<b>0.1</b>	<b>1.3013</b>	<b>1.5559</b>	<b>2.2411</b>		
	<b>0.5</b>	<b>1.8068</b>	<b>1.3025</b>	<b>2.6914</b>		
<b>7</b>	<b>0.01</b>	<b>0.9127</b>	<b>1.5947</b>	<b>2.0021</b>	<b>1.8704</b>	
	<b>0.1</b>	<b>1.2615</b>	<b>1.5196</b>	<b>2.2392</b>	<b>1.6804</b>	
	<b>0.5</b>	<b>1.7896</b>	<b>1.2961</b>	<b>2.7177</b>	<b>1.3848</b>	
<b>9</b>	<b>0.01</b>	<b>0.8854</b>	<b>1.5513</b>	<b>1.9614</b>	<b>1.8616</b>	<b>2.0717</b>
	<b>0.1</b>	<b>1.2446</b>	<b>1.5017</b>	<b>2.2220</b>	<b>1.6829</b>	<b>2.2967</b>
	<b>0.5</b>	<b>1.7822</b>	<b>1.2921</b>	<b>2.7162</b>	<b>1.3922</b>	<b>2.7734</b>
<b>n</b>	$A_{max}$	$L_1$	$C_2$	$L_3$	$C_4$	$L_5$

## Chapter 7

# Tentamenopgaven